Les énoncés d'exercices sont de deux types :

- Calculer la somme de la série $\sum u_n$.
Dans ce cas, il faut calculer la somme partielle d'ordre $n$ puis calculer sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
- Donner la nature de la série $\sum u_n$ **OU** Montrer que $\sum u_n$ converge **OU** Montrer que $\sum u_n$ diverge.
Dans ce cas, il faut si possible éviter de calculer la somme partielle (ce serait du temps de perdu). Le choix de la méthode doit prioritairement se porter sur un des trois **théorèmes de comparaison**.

*Méthode* (pour déterminer la nature de la série $\sum u_n$).

1. On commence par se demander si la série $\sum u_n$ est une série **usuelle**. Si c'est le cas, le cours permet de conclure sans aucun calcul.
2. Si ce n'est pas le cas, on détermine la limite de la suite $(u_n)$.

   *Premier cas : la suite $(u_n)$ ne converge pas vers 0.*
   Alors on peut conclure que la série $\sum u_n$ diverge **grossièrement** et donc diverge.

   *Deuxième cas : la suite $(u_n)$ converge vers 0.*
   Alors la série $\sum u_n$ peut être **convergente** ou **divergente**. Une étude plus précise doit être réalisée.

   Il s'agit d'une première étude de la « taille » du terme général $u_n$ de la série $\sum u_n$ étudiée.
3. Si la série $\sum u_n$ est à termes positifs, on dispose des trois outils suivants :
   (a) Critère d'équivalence des séries à termes positifs.
   (b) Critère de négligeabilité des séries à termes positifs.
   (c) Critère de comparaison des séries à termes positifs.

   On estime ici plus précisément la « taille » du terme général $u_n$ de la série $\sum u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare $u_n$ au terme général $v_n$ d'une **série de référence**.

   *Ordre de priorité pour le choix du critère.* On essayera toujours d'utiliser le critère d'équivalence en premier, car lors d'un calcul d'équivalent il suffit d'appliquer toutes les formules usuelles du cours et simplifier pour obtenir le résultat. Il n'y a pas besoin de **deviner** avec quoi comparer, contrairement aux deux critères suivants. Si aucun équivalent simple n'est obtenu, il faut alors essayer le critère de négligeabilité, car il est plus facile de calculer une limite que de prouver une inégalité valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   *Utilisation du critère de négligeabilité.*
   - Si l'on pense que $(u_n)$ tend suffisamment vite vers 0 et que la série $\sum u_n$ **converge**, alors on essaye de montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ou que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
   - Si l'on pense que $(u_n)$ tend vers 0 trop lentement et que la série $\sum u_n$ **diverge**, alors on essaye de montrer que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
4. Si la série $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même **nature** que $\sum u_n$.
5. Si la série $\sum u_n$ est « quelconque » (*i.e.* $u_n$ change de signe). On pourra penser à l'une des méthodes suivantes :
   (a) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geq 0$, les techniques du point 3 sont utilisables)
      i. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente (*i.e.* la série $\sum u_n$ est **absolument** convergente) alors la série $\sum u_n$ est convergente.
      ii. Si la série $\sum |u_n|$ est divergente alors la série $\sum u_n$ peut être **convergente** ou **divergente**. Une étude plus précise doit être réalisée.
   (b) On revient à la définition : la série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_n)$ est convergente.
      i. On peut calculer $S_n$ :
         A. en reconnaissant des séries usuelles après manipulation du terme général $u_n$.
         B. en reconnaissant une somme télescopique.
      ii. On peut estimer $S_n$ à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison série/intégrale.

   Évidemment, les techniques du point 5b restent utilisables pour une série à termes positifs.