Colles de Mathématiques en E2A
v.a.r. discrètes, applications linéaires
Semaine 8 : 6-10 novembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre VII : v.a.r. discrètes

Les élèves doivent connaitre **par coeur** les lois usuelles (notation, loi, espérance, variance). Les exercices peuvent porter sur

- La loi d'une v.a.r. discrète. Présentation sous forme de tableau pour une loi finie.
- Le calcul d'une espérance.
- Le calcul d'une variance.
- La détermination de la loi d'une transformée d'une v.a.r. discrète.

On évitera les exos portant sur les fonctions de répartition des v.a.r. discrètes (fait en cours, mais hors-programme)

1.1 Définitions

- Variable aléatoire réelle discrète (finie ou infinie).
- Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète.
- Loi de probabilité d'une v.a.r. discrète.
- Espérance d'une v.a.r. discrète. Moment d'ordre r d'une v.a.r. discrète.
- Variance, écart-type d'une v.a.r. discrète.
- Loi certaine, loi quasi-certaine.
- Loi uniforme.
- Loi de Bernoulli.
- Loi binomiale.
- Loi géométrique.
- Loi de Poisson.

1.2 Résultats

- Formule de la fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. A savoir retrouver sur des exemples simples.
- Formule
$$\boxed{\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1}$$
provenant du fait que la famille $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
- Théorème de transfert.
- Propriétés de l'espérance.
- Formule de Kœnig-Huygens.
- Propriétés de la variance.
- Espérance et variance des v.a.r. suivant une loi usuelle. Pour chaque loi usuelle, il faut connaître l'expérience aléatoire de référence et la variable aléatoire associée.

1.3 Méthodes

- Lors de la définition d'une v.a.r. à l'aide d'une phrase associée au résultat d'une expérience concrète, il faut être capable de reconnaître qu'elle suit une loi usuelle le cas échéant. On utilisera pour cela la description d'une expérience aléatoire de référence.
- Si X est une v.a.r. et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application, il faut savoir trouver la loi de $g(X)$. Il faut également savoir calculer son espérance à l'aide du théorème de transfert.
- (non exigible mais vu en cours) être capable de déterminer F_X si on connait la loi de X. Inversement, on peut retrouver la loi de X à partir de sa fonction de répartition F_X.

2 Chapitre VIII : Applications linéaires

2.1 Définitions

- Application linéaire, endomorphisme.
- Isomorphisme, automorphisme, application réciproque.
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Rang d'une application linéaire.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice colonne associée à un vecteur dans une base.
- Matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
- Matrice associée à une application linéaire dans deux bases, à un endomorphisme dans une base.

2.2 Résultats

- Caractérisation des applications linéaires via l'image d'une combinaison linéaire.
- Propriétés sur la composition d'applications linéaires. L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme, $(v\circ u)^{-1} = u^{-1}\circ v^{-1}$.
- Le noyau d'une application linéaire est un sev de l'ev de départ. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.
- L'image d'une application linéaire est un sev de l'ev d'arrivée. Caractérisation de la surjectivité à l'aide de l'image.
- Résultats propres à la dimension finie : expression de l'image de f à l'aide d'une base de l'espace de départ, caractérisation de f injective/surjective/bijective via les familles de vecteurs et via le rang, si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$, théorème du rang, condition suffisante pour être un isomorphisme (injectivité + argument de dimension, ou surjectivité + argument de dimension).

- « Passerelle matrice-endomorphisme » ou isomorphisme de représentation matricielle. Il faut savoir traduire les opérations sur les vecteurs et les applications linéaires en des opérations sur les vecteurs colonnes et les matrices.
- Formule de changement de base (pour les vecteurs et pour les endomorphismes)

2.3 Méthodes

On a vu deux nouvelles méthodes pour montrer que $F \subset E$ est un sev de E.

- on peut montrer que F est le noyau d'une application linéaire.
- on peut montrer que F est l'image d'une application linéaire.

Il faut savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.

Il faut savoir calculer la matrice représentative d'un vecteur ou d'une application linéaire dans une base donnée.

La représentation matricielle d'un endomorphisme f permet de calculer simplement son noyau via la passerelle matrice-endomorphisme. Elle permet également de calculer le rang de f.

3 Questions de cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}([X = k]) = \alpha k$$
Déterminer la valeur de α.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de X sous forme d'un tableau puis calculer $\mathbb{E}((X-2)^2)$.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de X sous forme d'un tableau puis déterminer la loi de $(X-2)^2$.
4. Ecrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un réel $p \in]0,1[$ et qui simule une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (cf TP 4).
5. Ecrire une fonction **Python** qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $p \in]0,1[$ et qui simule une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (cf TP 4).
6. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$ est linéaire.
7. On considère l'endomorphisme
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array} \right.$$
On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
8. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.