Exos de cours

Exercice 1 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x-5y \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 3x+y) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+y, 3x) \end{array} \right.$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM + BM \end{array} \right.$

Exercice 3 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(0)X + P(X) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & XP(X+1) \end{array} \right.$

Exercice 4 : Calculer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-2y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & 3x+2y-z \end{array} \right.$

Exercice 5 : Calculer l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) - P(X+1) + P(0)X^2 \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Exercice 6 : Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de Φ.
3. En déduire la dimension de $\text{Im}(\Phi)$.
4. Vérifier que $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7 : Les applications linéaires suivantes sont-elles des isomorphismes ?

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, 2y, -x+3y+z) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x-y & -y \end{pmatrix} \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a+d, b-c, c) \end{array} \right.$
5. $f_5 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2y) \end{array} \right.$
6. $f_6 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 : On note $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Plus précisément :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2$$

On note $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille de vecteurs définie par :

$$R_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

On considère : $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. (a) Quel est le vecteur colonne associé à P_0 dans la base $\mathcal{B}_1$? Même question pour P_1 et P_2.
   (b) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. (a) Démontrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Quel est le vecteur colonne associé à R_0 dans la base $\mathcal{B}_2$? Même question pour R_1 et R_2.
   (c) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 9 : On considère de nouveau $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$. On note $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
2. Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.
3. (a) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (b) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_1$ à l'aide de la formule de changement de base.
   (c) Écrire alors la formule de chagement de base permettant de déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_2$ connaissant la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 10 : On considère les endomorphismes

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{B}' = (P_0, P_2, P_1, P_3)$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ puis en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$ puis en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\psi)$.

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Écrire la matrice de φ dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12 :`(EDHEC 2016)`
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

Exercice 13 : Soit f un endomorphisme dont la matrice représentative est notée A. Calculer le rang de f et dire si f est bijective dans chacun des cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -9 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Des exemples d'applications linéaires, de noyaux et d'images

Exercice 14 : Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y-t, x+8y-9z-2t, x-2y+3z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. On donnera une base de ces espaces vectoriels.

Exercice 15 : On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = Q \quad \text{où} \quad Q(X) = XP(X+1) - (X+1)P(X)$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 16 : Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM \end{array} \right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer $u(M)$ lorsque $M \in \mathrm{Im}(u)$. Que peut-on en déduire pour u^2 ?

Exercice 17 : Soient $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & XP(X) \end{array} \right.$ et $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $v \circ u - u \circ v$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$.

Exercice 18 : *(trace d'une matrice)* Soit $\mathrm{tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array} \right.$.

1. Montrer que l'application tr est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et donner sa dimension.

Applications linéaires et matrices associées

Exercice 19 : Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $p(x,y) = \frac{1}{5}(4x+2y, 2x+y)$.

1. Calculer $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$.
2. Montrer que $p^2 = p$ via la matrice associée à p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
4. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer f^{-1}.

Exercice 21 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ -x+2y+z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la matrice A canoniquement associée à l'endomorphisme f ?
3. Déterminer le noyau de f. On en donnera une base.
4. Déterminer l'image de f. On en donnera une base.

Exercice 22 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f - 4id$. En déduire le noyau de $f - 4id$.
3. Déterminer un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ de première composante égale à 1 tel que $f(v) = 4v$.
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 : Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$. On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ P(X) & \mapsto & (X-1)P'(X) - P(X) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice associée à f dans la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E.
3. Déterminer le noyau de f, ainsi que la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Préciser le rang de f, et déterminer l'image de f.
5. Déterminer l'endomorphisme f^2.

Exercice 24 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$.

On note $\mathcal{B} = \left(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer le noyau de φ.
4. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel réel.
   (b) Déterminer une base de $\mathscr{C}$.

Exercice 25 : On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) + P'(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice canoniquement associée à φ^{-1}.
4. En déduire l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(X) + P'(X) = 1 - X^2$.

Exercice 26 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère les vecteurs $u = (0,1,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ f^n = (2^n - 1) f + (2 - 2^n)$ Id.

Exercice 27 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x + 4y + 2z, -3y - 2z, 4y + 3z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le noyau de f.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Qu'en déduit-on ?

Matrice de passage, formule de changement de base

Exercice 28 :*(d'après* `EDHEC 2005`*)*

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a + d) I$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$ et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3, J_4.
   (b) Écrire la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
3. (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Écrire la matrice D de f dans cette base.
   (c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$
4. (a) Déterminer la matrice P^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) En déduire explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.

Exercice 29 :*(d'après* `EDHEC 2006`*)*

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ?

2. (a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la 2e coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.
   (b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 2e coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.
   (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Expliciter la matrice P.
3. (a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 3$, on a : $A^k = 0$.
4. On note $\mathscr{C}_N$ (respectivement $\mathscr{C}_A$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement avec A).
   (a) Montrer que $\mathscr{C}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On admet que $\mathscr{C}_A$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.
   (c) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir que $M \in \mathscr{C}_A \iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}_N$.
   (d) En déduire que $\mathscr{C}_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$. Quelle est la dimension de $\mathscr{C}_A$?

Exercice 30 : *(d'après* `ESSEC 2007 - Maths III`*)*
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = 0,$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} &= 3u_n - v_n + w_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} &= v_n + w_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Enfin, on note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit $A\,X_n$.
   (b) En déduire l'expression de X_n, en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
   (a) Déterminer une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et que les vecteurs e_1', e_2', e_3' aient respectivement pour troisième composante $1, -1$ et 2.
   On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e_1', e_2', e_3').
   (b) A l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante de T :

   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$.
   (a) Exprimer A en fonction des matrices T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Binôme de Newton pour les endomorphismes (analogue aux matrices)

Exercice 31 : Soit E un espace vectoriel réel. Soient u et v des endomorphismes de E tels que u et v commutent, *i.e.*

$$u \circ v = v \circ u$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, u^k et v commutent, *i.e.*

$$u^k \circ v = v \circ u^k$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

Algèbre théorique type HEC

Exercice 32 : Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.
1. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, alors $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$.
2. Montrer que si $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$, alors $\operatorname{Im} u^3 = \operatorname{Im} u^2$.

Exercice 33 : Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$. On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$. On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(p) = \{0_E\}$.

Exercice 34 : Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$\text{pour tout } i \in [\![1,3]\!], \qquad \varphi(e_i) = e_{i+1}$$
$$\varphi(e_4) = e_1$$

1. Montrer sans calcul que φ est un automorphisme.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique.
3. Déterminer l'isomorphisme réciproque de φ. En déduire la matrice de A^{-1}.

Exercice 35 :(Suites des noyaux et images itérés)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E.

1. Suite des noyaux itérés
   (a) Démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\operatorname{Ker}\left(f^r\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{r+1}\right)$$

   Démontrer : $\forall i \in [\![r, +\infty[\![$, $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.
   (c) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note : $d_i = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^i\right)\right)$.
      i. Démontrer que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. En procédant par l'absurde, démontrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.
      iii. En déduire que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. Suite des images itérées
   (a) Démontrer : $\forall j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(f^j\right)$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\operatorname{Im}\left(f^{s+1}\right) = \operatorname{Im}\left(f^s\right)$$

   Démontrer : $\forall j \in [\![s, +\infty[\![$, $\operatorname{Im}\left(f^{j+1}\right) = \operatorname{Im}\left(f^j\right)$.
   (c) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note : $m_j = \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^j\right)\right)$.
      i. Démontrer que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. Démontrer : $m_{r+1} = m_r$ (où r est l'entier défini en question 1(c)ii.
      iii. En déduire que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Ici, on déborde du programme

Exercice 36 : Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_3 \\ f(e_2) &= -e_1 + e_2 - 3e_3 \\ f(e_3) &= e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Calculer $f^2(e_1)$, $f^3(e_1)$, $f^2(e_2)$, $f^3(e_2)$, $f^2(e_3)$ et $f^3(e_3)$.
4. (HP) Montrer que $\left(\mathrm{Id}, f, f^2\right)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
5. Montrer que $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Écrire la matrice de f relativement à la base $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$ de $\mathbb{R}^3$.
7. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Justifier qu'il existe un unique triplet (a, b, c) de réels tel que $g(e_1) = ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1)$.
   (b) Démontrer qu'alors $g = a\,\mathrm{Id} + bf + cf^2$.

Exercice 37 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles (HP). On considère le sous ensemble F de E formé des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. On pose

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} F & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que Φ est un isomorphisme.
3. En déduire que F est de dimension finie, et donner la dimension de F.
4. Déterminer deux suites géométriques non nulles et distinctes $\left({r_1}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left({r_2}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F.
5. Montrer que $\left(\left({r_1}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left({r_2}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de F. Pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F, donner ses coordonnées dans la base obtenue.