Exos de cours

Exercice 1 : Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules, sans remise.

1. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?
2. Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

Exercice 2 : On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
2. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.
3. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3 : Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Exercice 4 : On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

1. si une personne est malade, le test est positif à 99%,
2. si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test s'est révélé négatif soit en réalité malade ?

Exercice 5 : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Supposons $\mathbb{P}(A) = 0$. Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.
2. Supposons $\mathbb{P}(A) = 1$. Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 6 : On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment un dé équilibré à 6 faces.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_n : \text{« on n'a pas obtenu 6 lors des } n \text{ premiers lancers »}$$

1. Exprimer l'événement A : « on n'obtient jamais 6 » en fonction des A_n.
2. En déduire la probabilité de A.
3. Démontrer que l'événement B : « obtenir au moins une fois un numéro pair » est un événement quasi-certain.

Exercice 7 : Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire. On considère les événements suivants :

- A : « on effectue un nombre fini de tirages »,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ème}}$ tirage »,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : « on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

1. Démontrer que les événements F_n sont deux à deux incompatibles.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement F_n en fonction des événements B_i.
3. Exprimer A en fonction des événements F_n puis calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 8 : Soit $N \geqslant 2$. On considère une urne contenant N boules, numérotées de 1 à N. On effectue une infinité de tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n : « On tire toujours la boule numéro N lors des n premiers tirages ». Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
   (b) On note A : « on a tiré exclusivement la boule numéro N au cours de l'expérience ». Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n : « On tire au moins une fois la boule numéro N lors des n premiers tirages ». Calculer $\mathbb{P}(B_n)$.
   (b) On note B : « on a tiré au moins une fois la boule numéro N au cours de l'expérience ». Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 9 : On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in \left]0,1\right[$. Pour tout $n \geq 2$, on note :

A_n : « au cours des n premiers lancers, si une pièce tombe sur face alors toutes les suivantes aussi »

1. Quels sont les événements élémentaires associés à cette expérience ?
2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que : $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$.
3. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que : $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$.
4. Est-il possible que face ne soit jamais suivi de pile ?

Dénombrement ou cas de l'équiprobabilité

Exercice 10 : On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Aucune condition.
2. Il y a un carré.
3. Il y a exactement un pique.
4. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
5. Il y a exactement deux valets.
6. Il y a exactement un as et deux carreaux.
7. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
8. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
9. Les cinq cartes sont de la même couleur.
10. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

Exercice 11 : On tire 5 atouts dans un jeu de tarot. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Au moins un atout est multiple de 5.
2. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 (différent du multiple de 5).
3. On a tiré le 1 ou le 21.

Exercice 12 : On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 2$). On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise. A l'issue de l'expérience, on note $\omega = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la liste des numéros tirés.

- Pour $2 \leq i \leq n$, on dit qu'il y a record au tirage i si u_i est plus grand que tous les numéros précédemment tirés, c'est-à-dire si $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$.
- D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record au tirage 1.

Calculer les probabilités qu'à l'issue de l'expérience on assiste exactement à :

1. un seul record.
2. n records.
3. deux records.

Formule des probabilités composées

Exercice 13 : Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement et indéfiniment des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule supplémentaire de la même couleur. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n : \text{« la boule tirée au } n^{\text{e}} \text{ tirage est blanche »}$$
$$B_n : \text{« les } n \text{ premières boules tirées sont blanches »}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer B_n en fonction des événements A_k.
2. Déterminer $\mathbb{P}(B_n)$.
3. Montrer que la boule rouge initiale sera tirée, de manière quasi-certaine, au cours de l'expérience.

Formule des probabilités totales

Exercice 14 :*(d'après* `ECRICOME 2005`*)* On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n : « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$ ».
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- pour tout entier naturel n non nul : $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.
- avec la convention $a_0 = 0$.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,
$$a_{n+2} - q\,a_{n+1} - pq\,a_n = 0$$
3. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètres d'entrée n, p et q, et qui renvoie a_n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n,
$$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$$
5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Formule de Bayes

Exercice 15 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite. On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- si la personne est malade, alors le test est positif avec une proba de 95%.
- si la personne est saine, alors le test est positif avec une proba de 10%.

Quelle est :

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Indépendance d'évènements

Exercice 16 : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants. Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

Exercice 17 : Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les événements suivants :

A : « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »

B : « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »

C : « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »

D : « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

Parmi ces événements, dire lesquels sont indépendants. Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 18 : Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de $0,52$. Par ailleurs, on sait que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. On note F l'événement « naissance d'une fille » et L l'événement « avoir une luxation de la hanche ». Les événements F et L sont-ils indépendants ?
2. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplit une urne avec n boules noires ou blanches, en tirant à pile ou face la couleur de chaque boule, puis on effectue deux tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne, en notant la couleur de chacune des deux boules obtenues.

1. Quelle est la probabilité de B_1 : « la première boule obtenue est blanche » ?
2. Quelle est la probabilité de B_2 : « la deuxième boule obtenue est blanche » ?
3. Quelle est la probabilité que les deux boules obtenues soient blanches ?
4. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Évolution d'une grandeur aléatoire dans le temps (discret) - Chaînes de Markov

Exercice 20 : Un professeur oublie fréquemment ses clés. Ces oublis vérifient le schéma suivant :

- si le jour n il oublie ses clés, le jour $(n+1)$ suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$,
- si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour $(n+1)$ suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

On notera $p_1 = a \in]0,1[$, la probabilité que le professeur oublie ses clés le premier jour. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'événement : « le jour n, le professeur oublie ses clés » et $p_n = \mathbb{P}(E_n)$.

1. Établir une relation entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire l'expression explicite de p_n.

Exercice 21 : Bob possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations. Il a constaté que :

- si un mois donné il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est égale à $\frac{1}{5}$.
- si un mois donné il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est égale à $\frac{2}{5}$.

On suppose que la probabilité qu'il ait dépassé son forfait le premier mois est égale à $\frac{1}{2}$. Dans la suite, on considère A_n l'événement suivant.

$$A_n : \text{« Bob dépasse son forfait le } n^{\text{ème}} \text{ mois »}$$

et on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Soit $n \geq 1$. Établir une relation entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire l'expression explicite de p_n.

Exercice 22 : Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 23 : Deux joueurs A et B jouent aux échecs sans discontinuer.

1. Le joueur B gagne la première partie.
2. La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$.
3. La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$.

On note p_n la probabilité que B remporte la $n^{\text{ème}}$ partie. Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.