Table des matières

La réduction des matrices carrées consiste moralement à remplacer une matrice quelconque par une matrice diagonale ou triangulaire. Ce procédé permet de faire des calculs plus simplement. En particulier, cela a des applications pour les problèmes suivants :

- Calcul de la puissance n^e d'une matrice
- Etude d'une suite récurrente linéaire
- Etude d'un système différentiel linéaire
- Etude d'une chaîne de Markov
- Etude des extrema d'une fonction de deux variables

1 Matrices semblables

1.1 Définition

Definition 1. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices M et N sont dites *semblables* si il existe une matrice inversible P telle que :

$$\boxed{M = PNP^{-1}}$$

Proposition 1. *La relation de similitude (celle qui stipule qu'une matrice M est semblable à une matrice N) vérifie les propriétés suivantes :*

- *elle est réflexive : M est semblable à M.*
- *elle est symétrique : si M est semblable à N alors N est semblable à M.*
- *elle est transitive : si M est semblable à N et N est semblable à R alors M est semblable à R.*

1.2 Puissances de matrices semblables

Théoreme 2. *Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M et N sont semblables et donc qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $M = PNP^{-1}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$M^k = PN^kP^{-1}$$

Autrement dit, si M et N sont semblables via la matrice P, M^k et N^k le sont aussi via la même matrice P.

Remarque 1 (Application du théorème). Considérons M et N deux matrices semblables et $k \in \mathbb{N}$. Par définition, il existe P inversible telle que : $M = PNP^{-1}$. Si on sait facilement calculer N^k, on peut en déduire la valeur de M^k en utilisant la relation : $M^k = PN^kP^{-1}$. Dans les énoncés on rencontrera de manière classique les cas suivants.

- N est diagonale.

$$\text{Si } N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad N^k = \begin{pmatrix} {d_1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {d_2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {d_n}^k \end{pmatrix}$$

- $N = \lambda\, I_n + R$ où R est une matrice dont on peut facilement déterminer les itérées. Par exemple, $R \neq 0$ peut vérifier :
  - $\forall k \geqslant 2, R^k = 0$.
    (on dit alors que R est nilpotente d'ordre 2)
  - $\forall k \geqslant 2, R^k = 2^{k-1}\, R$.

  Dans ces deux cas, on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 :*(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer N^2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

1.3 Lien entre relation de similitude et applications linéaires

Théoreme 3 (Formule de changement de base)**.** *Soit E un ev de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors,*

1. *On a la relation*
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\ (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}}$$
et donc deux matrices représentatives de f dans deux bases différentes sont toujours semblables.
2. *La réciproque est vraie. Soient $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux matrices distinctes. Les matrices M et N sont semblables si et seulement si M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes.*

Exercice 2 :*(d'après* `EDHEC 2016`*)*
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A et la matrice dans $\mathcal{B}'$ est notée T.
On suppose que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = n2^{n-1}\ T - (n-1)\,2^n\ I$$
Démontrer alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\,2^n\ I$$

Correction type `EDHEC`. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, on en déduit par la passerelle matrice-endomorphisme :
$$f^n = n2^{n-1}\ f - (n-1)\,2^n\ \mathrm{Id}_E$$
Comme A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on en déduit par la passerelle endomorphisme-matrice :
$$A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\,2^n\ I$$
□

Exercice 3 :*(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
On note $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
3. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer P^{-1}. Donner une interprétation de cette matrice.
5. Quel est le lien entre les trois matrices précédentes ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut A^n ?

Remarque 2.

1. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice représentative T de f est triangulaire supérieure. Cette forme est plus simple que celle de A. Ainsi, on détermine T^n afin d'en déduire A^n. Évidemment, l'élévation à la puissance n aurait été encore plus simple si on avait obtenu une matrice diagonale.
2. Il est alors naturel de se poser la question de savoir si, pour toute matrice A, on est capable de trouver une matrice diagonale (forme idéale pour les manipulations) semblable à A.
3. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas (comme on va le voir). Le but du chapitre est donc de caractériser les matrices qui sont semblables à une matrice diagonale.

2 Éléments propres d'une matrice carrée : valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

2.1 Définitions

Definition 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On dit que λ est une *valeur propre* de la matrice A si il existe un vecteur colonne $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul* tel que :

$$\boxed{AU = \lambda U}$$

2. L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé *spectre de* A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists U \neq 0, AU = \lambda U\}}$$

Definition 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On dit que U est un *vecteur propre* de A associé à la valeur propre λ si $AU = \lambda U$.

Remarque 3. Le vecteur nul n'est `JAMAIS` un vecteur propre. En effet, si on autorisait le vecteur nul à être un vecteur propre, alors tout réel λ serait une valeur propre (puisque $A0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = \lambda 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$) et cette définition n'aurait aucun intérêt.

En revanche, il n'y a aucune restriction dans la définition de valeur propre : 0 peut être une valeur propre de A.

Méthode. (Pour démontrer que λ est une valeur propre de A) Supposons que l'énoncé nous invite à calculer AU et que l'on trouve $AU = \lambda U$. Pour justifier que λ est une valeur propre de A, on devra rédiger de la manière suivante :

On a

- $AU = \lambda U$
- $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

donc λ est une valeur propre de A.

Remarque 4. Certaines matrices admettent des valeurs propres et d'autres non.

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ admet 3 comme valeur propre.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre.
3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne possède aucune valeur propre. *(Il faut nier* $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists U \neq 0, AU = \lambda U$*)*

Exercice 4 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AU pour $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AU_i pour $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

Definition 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &\overset{\text{def}}{=} \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AU = \lambda U\} \\ &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I_n)U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \end{aligned}$$

Si λ est une valeur propre de A, on dit que $E_\lambda(A)$ est le *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ.

Remarque 5 (Attention)*.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ une valeur propre de A.

$$E_\lambda(A) \neq \{\text{vecteurs propres de } A \text{ associés à la valeur propre } \lambda\}$$

La bonne définition est :

$$E_\lambda(A) = \{\text{vecteurs propres de } A \text{ associés à la valeur propre } \lambda\} \cup \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$$

2.2 Valeurs propres

2.2.1 Nombre maximal de valeurs propres

Théoreme 4. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in [\![1, n]\!]$ et $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^p$.*
Si U_1, ..., U_p sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes *λ_1, ..., λ_p de A, alors la famille $(U_1, \dots, U_p)$ est libre (on a donc $p \leqslant n$ et c'est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ssi $p = n$).*

Corollaire 5. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A possède au plus n valeurs propres* distinctes.

Exercice 5 : Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique (notée $\mathcal{B}$) est :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On note :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.
   (b) En déduire le spectre de M.
2. Notons v_1 l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1) = V_1$. On définit de même v_2 et v_3.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer N, la matrice représentative de φ dans $\mathcal{B}'$.
3. (a) Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (b) Quel lien y a-t-il entre les matrices M, N et P ?
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer M^n.

Théoreme 6 (Concaténation de familles libres contenues dans des sous-espaces propres distincts)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

- *Soient λ_1, ..., λ_p des valeurs propres* distinctes *de A.*
- *Soient $\mathcal{F}_1$, ..., $\mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  × *la famille $\mathcal{F}_i$ est libre.*
  × *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_p$ (obtenue par concaténation) est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Autrement dit, une concaténation de familles libres contenues dans des sous-espaces propres distincts forme une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2.2.2 Caractérisation des valeurs propres

Théoreme 7. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff \exists U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ AU = \lambda U \\ &\iff \exists U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ (A - \lambda I_n)U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I_n)\, U = 0\} \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \\ &\iff E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \\ &\iff \text{La matrice } A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \end{aligned}$$

Ainsi, pour montrer que λ est une valeur propre de A, on calcule le rang de $A - \lambda I_n$.

2.3 Sous-espaces propres

2.3.1 Structure d'un sous-espace propre

Théoreme 8. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*
- *On a l'équivalence :*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ une valeur propre de } A &\iff E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \\ &\iff \dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1 \end{aligned}$$

  qui donne par contraposée :

$$E_\lambda(A) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \iff \lambda \text{ n'est pas une valeur propre de } A$$

- *Le théorème du rang donne :*

$$n = \dim(E_\lambda(A)) + \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$$

Remarque 6. On trouvera parfois la notation $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = E_\lambda(A)$ mais elle n'est pas au programme et il ne faut pas l'utiliser.

2.3.2 Détermination d'un sous-espace propre

Méthode (Déterminer $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à une valeur propre λ donnée.). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A. Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$U \in E_\lambda(A) \iff (A - \lambda I_n)U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

Exercice 6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

Déterminer les sous-espaces propres de A.

2.4 Méthodes pour déterminer les valeurs propres

2.4.1 Matrices spéciales

Théoreme 9. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. La matrice A est non inversible si et seulement si l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul.*

Théoreme 10. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Si la matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) , alors les valeurs propres de A sont exactement ses coefficients diagonaux.*
- *En particulier, si la matrice A est diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement ses coefficients diagonaux.*

Exercice 7 : Déterminer le spectre des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.4.2 Matrices carrées d'ordre 2

Definition 5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Théoreme 11. *Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a*

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

et par contraposée

$$A \text{ n'est pas inversible} \iff \det(A) = 0$$

On en déduit le critère suivant :

Théoreme 12. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \end{aligned}$$

Exercice 8 : Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{Sp}(C)$ et $\mathrm{Sp}(D)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2$$

d'où

$$C - \lambda I_3 \text{ non inversible} \iff \det(C - \lambda I_3) = 0 \iff (2 - \lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 2$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(C) = \{2\}$.

$$\det(D - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 + 1$$

Il n'existe pas de réel λ tel que $\lambda^2 = -1$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(D) = \varnothing$. □

2.4.3 Pivot de Gauss pour le cas général

Rappel :

Théoreme 13. *Le pivot de Gauss matriciel ne change pas le rang.*

Méthode (Déterminer les valeurs propres d'une matrice). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons M_λ la réduite de Gauss de $A - \lambda I_n$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ &\iff \mathrm{rg}(M_\lambda) < n && \text{\textit{le rang est invariant par pivot de Gauss}} \\ &\iff M_\lambda \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \begin{array}{l}\text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux} \\ \text{de la réduite } M_\lambda \text{ est nul}\end{array} && M_\lambda \text{ \textit{est triangulaire supérieure}} \end{aligned}$$

En pratique, on procèdera comme suit.

1. On écrit la matrice $A - \lambda I_n$ où λ est un paramètre.
2. On calcule le rang de $A - \lambda I_n$ via l'algorithme du pivot de Gauss. En opérant par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (ce qui ne modifie pas le rang), on obtient une matrice réduite M_λ sous forme triangulaire supérieure.
   $\hookrightarrow$ Toujours commencer par $L_1 \leftrightarrow L_3$ sauf si il y a un zéro en bas à gauche (dans ce cas on fait $L_1 \leftrightarrow L_2$)
   $\hookrightarrow$ Ne jamais utiliser un pivot qui dépend de λ (on risque sinon d'avoir un pivot nul)
   $\hookrightarrow$ Faire chaque calcul au brouillon et factoriser les polynômes en λ à chaque étape
3. Les valeurs propres de la matrice A sont exactement les valeurs de λ qui annulent un des coefficients diagonaux de la matrice réduite M_λ.

Exercice 9 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -8 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de B.

Démonstration. 1. On montre que

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2(\lambda-4) \\ 0 & 0 & (\lambda-4)(2-\lambda) \end{pmatrix}\right)$$

2. On montre que

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & -8-\lambda & 5 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -5 & -8-\lambda & 5 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+3) \end{pmatrix}\right)$$

□

2.4.4 Via l'outil informatique

On rappelle qu'en important la bibliothèque `numpy.linalg` (`as al`), on a accès aux fonctions suivantes :

- `al.matrix_rank(A)` qui renvoie le rang de la matrice `A`
- `al.eig(A)` qui renvoie les valeurs propres de la matrice `A` ainsi qu'un vecteur propre associé à chaque valeur propre

Exercice 10 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Le programme suivant

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
I = np.identity(3)
A = np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+3*I))
```

renvoie

```
1
2
```

En déduire les valeurs propres de A.

2.4.5 Via un calcul de sous-espace propre

On peut calculer $E_\lambda(A)$ (plutôt si on a de bonnes raisons de penser que λ est une valeur propre sinon cela fait beaucoup de calculs pour rien). Deux cas sont possibles :

- Si $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, alors λ est bien une valeur propre de A.
- Si $E_\lambda(A) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, alors λ n'est pas une valeur propre de A.

Cette méthode est à utiliser uniquement si l'énoncé nous y invite, on préférera faire un calcul de rang si on a le choix.

Exercice 11 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation $AU = U$ d'inconnue $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Qu'en déduit-on ?

2.4.6 Cas particulier de la valeur propre 0

Théoreme 14. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Le réel 0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible. Par contraposée : A est inversible si et seulement si le réel 0 n'est pas valeur propre de A.*
- *Si A représente un endomorphisme f de E, alors f est un automorphisme de E si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.*

2.4.7 Valeurs propres de matrices semblables

Théoreme 15. *Soient M et N des matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,*

- $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$.
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ sont semblables et donc $\mathrm{rg}(M - \lambda I_n) = \mathrm{rg}(N - \lambda I_n)$.*
- $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N)$.

Exercice 12 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $P^{-1}AP$ puis déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

2.4.8 Valeurs propres d'une matrice translatée par un multiple de l'identité

Théoreme 16 (Hors-programme)**.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $B = A - aI$. Alors*

$$\mathrm{Sp}(B) = \{\lambda - a \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mu \in \mathrm{Sp}(B) &\iff \exists X \neq 0, BX = \mu X \\
&\iff \exists X \neq 0, (A - aI)X = \mu X \\
&\iff \exists X \neq 0, AX - aX = \mu X \\
&\iff \exists X \neq 0, AX = (a + \mu)X \\
&\iff (a + \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \lambda = a + \mu \\
&\iff \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu = \lambda - a \\
&\iff \mu \in \{\lambda - a \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}
\end{aligned}$$

□

2.4.9 Trouver des valeurs propres à vue

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si A est diagonale ou triangulaire, on lit les valeurs propres de A sur sa diagonale
- On peut remarquer que 0 est valeur propre si :
  - × si la matrice A contient une colonne / ligne de 0
  - × si deux colonnes / lignes sont identiques
  - × si une colonne / ligne est une combinaison linéaire simple (somme ou différence) des autres colonnes / lignes
- Si la somme des coefficients sur chaque ligne donne le même résultat s, alors s est une valeur propre de A et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre s.

Exercice 13 : Pour chacune des matrices suivantes, trouver une (ou des) valeur(s) propre(s) à vue :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
6. $A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. $A_7 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 Polynômes annulateurs

3.1 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Definition 6. Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k \ X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r$$

- Cas des endomorphismes : On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k$. C'est un *polynôme d'endomorphismes.*
- Cas des matrices carrées : On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k$. C'est un *polynôme de matrices.*
- Lien entre les deux : Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a alors :

$$P(A) = P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$$

Exemple 1. Considérons $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Notons $P(X) = X^2 - 2X$. On a alors :

$$P(f) = f^2 - 2f \quad \text{et} \quad P(A) = A^2 - 2A$$

2. Notons $Q(X) = X^2 - 2X + 3$. On a alors :

$$\begin{aligned} Q(f) &= f^2 - 2f + 3f^0 \\ &= f^2 - 2f + 3\,\mathrm{Id}_E \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} Q(A) &= A^2 - 2A + 3A^0 \\ &= A^2 - 2A + 3I_n \end{aligned}$$

Pour déterminer $P(f)$ (resp. $P(A)$), il suffit de remplacer l'indéterminée X par f (resp. par A). Il faut cependant faire attention : cette stratégie ne fonctionne que si l'on considère que le terme constant du polynôme est le coefficient devant X^0.

3. Notons $R(X) = (X-1)(-2+3X^2)$. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} R(f) & = & (f - f^0)(-2f^0 + 3f^2) \\ & = & (f - \mathrm{Id}_E)(-2\,\mathrm{Id}_E + 3f^2) \end{array}$$
Et :
$$\begin{array}{rcl} R(A) & = & (A - A^0)(-2A^0 + 3A^2) \\ & = & (A - I_n)(-2I_n + 3A^2) \end{array}$$
4. Enfin, si $T(X) = 0$ (*i.e.* T est le polynôme nul) alors :
$$T(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad T(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

3.2 Polynômes annulateurs

Definition 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. On dit que $P(X)$ est un *polynôme annulateur* de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 14 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

Démonstration. Calculons :
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix},\ 2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ -3I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
et on a bien $A^2 + 2A - 3I = 0$. □

Théoreme 17. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un polynôme annulateur non nul de A.*

Remarque 7. Un tel polynôme annulateur sera proposé plus ou moins explicitement par l'énoncé. Par exemple :
- Montrer que $A^2 + 2A + 3I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. On en déduit que $P(X) = X^2 + 2X + 3$ est un polynôme annulateur de A.
- Montrer que $A^3 = A$. On en déduit que $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A.

3.3 Intérêt des polynômes annulateurs

3.3.1 Calculer l'inverse d'une matrice carrée

Exercice 15 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a vu que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

Remarque 8. Il est classique de démontrer le caractère inversible d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur. La méthode précédente fonctionne si le polynôme annulateur $P(X)$ étudié a un terme constant non nul.

3.3.2 Déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée

Théoreme 18. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a l'implication :*
$$\lambda \textit{ une valeur propre de } A \implies \lambda \textit{ est une racine de } P(X)$$
ce que l'on peut réécrire :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\textit{racines de } P(X)\}$$

Definition 8. Dans le contexte du théorème précédent, les racines du polynôme annulateur $P(X)$ seront appelées *valeurs propres possibles* de A.

Remarque 9. Une valeur propre possible n'est pas nécessairement une valeur propre mais les valeurs propres de A sont à recherchées parmi les valeurs propres possibles.

Exercice 16 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a vu que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. Que peut-on en déduire ?

Méthode. (Pour déterminer si une valeur propre possible est une valeur propre ou non.)

Soit λ une valeur propre possible de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On calcule $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$. Deux cas sont possibles :

- Si $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$, alors λ est bien une valeur propre de A.
- Si $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n$, alors λ n'est pas une valeur propre de A.

Si l'on trouve que λ est bien une valeur propre de A et que l'on doit calculer une base et la dimension de $E_\lambda(A)$, alors on pensera à réutiliser les calculs précédents. En effet, les étapes du pivot de Gauss effectuées pour le calcul du rang de $A - \lambda I_n$ sont exactement les mêmes que celles que l'on doit effectuer pour résoudre le système linéaire associé à l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Exercice 17 :*(d'après* `EDHEC 2016`*)* Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynome annulateur de A. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

4 Diagonalisation des matrices carrées

4.1 Notion de matrice diagonalisable

4.1.1 Définition

Definition 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice *diagonalisable* si il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Autrement dit, A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Diagonaliser la matrice A, c'est trouver de manière <u>explicite</u> une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque 10. Toute matrice diagonale D est diagonalisable, puisque $D = PDP^{-1}$ avec P la matrice identité.

Exercice 18 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable. Démontrer que A^2 est diagonalisable.

Exercice 19 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable. Soit B une matrice semblable à A. Démontrer que B est diagonalisable.

Démonstration. Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :
$$A = PDP^{-1}$$
Comme A et B sont semblables, il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
$$A = QBQ^{-1}$$
On en déduit :
$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{et donc} \quad B = Q^{-1}P\ D\ P^{-1}Q$$
Et ainsi $B = Q^{-1}P\ D\ (Q^{-1}P)^{-1}$. □

4.1.2 Caractérisation de la diagonalisabilité via une base de vecteurs propres

Théoreme 19. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable ssi il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.*

Méthode. On peut préciser le théorème précédent, ce qui donne une méthode pour diagonaliser une matrice A.

Supposons que $\mathcal{B}' = (U_1, \ldots, U_n)$ soit une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On note P la matrice obtenue en concaténant les vecteurs propres U_k :
$$P = \begin{pmatrix} U_1 & | \ldots\ldots | & U_n \end{pmatrix}$$
i.e., $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors la matrice
$$D = P^{-1}AP$$
est diagonale, donc A est diagonalisable. On peut préciser les coefficients de D :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, U_k est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k.

Les valeurs propres sont classées dans le même ordre que les vecteurs propres

Réciproquement, supposons que A est diagonalisable, *i.e.* il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :
$$A = PDP^{-1}$$
Notons $U_1, \ldots, U_n$ les vecteurs colonnes de P et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D. Alors :

- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, λ_k est une valeur propre de A
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, U_k est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k
- La famille $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4.2 Théorèmes de réduction

4.2.1 Condition suffisante de diagonalisabilité via le nombre de valeurs propres

Théoreme 20. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.*

Remarque 11 (Attention)*.* Ce n'est pas une équivalence. La matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonale donc diagonalisable. Cependant, elle n'admet qu'une seule valeur propre (qui est 1). Elle n'admet donc pas deux valeurs propres distinctes.

Exercice 20 : La matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

4.2.2 Caractère diagonalisable des matrices symétriques

Definition 10 (Matrice symétrique)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite *symétrique* si ${}^tA = A$. Autrement dit, A est symétrique si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Théoreme 21. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors A est diagonalisable.*

Exercice 21 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. (a) La matrice A est-elle inversible ?
   (b) En déduire une valeur propre de A.
3. (a) Calculer A^2.
   (b) Déterminer alors un polynôme annulateur de A.
4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
5. (a) Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

   (b) Que représente la matrice P ?
   (c) Déterminer P^{-1}.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n.

4.2.3 Critère de diagonalisabilité via la dimension (Hors-programme)

Théoreme 22. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de A. Notons $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_m}(A)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres. Alors,*

- *L'inégalité $\sum_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leqslant n$ est toujours vraie.*
- *A est diagonalisable ssi $\sum_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$.*

On retiendra pour les raisonnements au brouillon que pour une matrice carrée A de taille 3 : A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 3. Il vaut mieux ne pas utiliser ce thm au propre car il a disparu du programme.

Exercice 22 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $E_2(A)$ et $E_5(A)$.
2. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

   On explicitera P et P^{-1}.
5. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Quelle propriété a A^n ? Pourquoi ?

4.3 Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Théoreme 23 (Hors-programme)**.** *Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$$A = \lambda I_n \text{ ssi } A \text{ est diagonalisable et } \lambda \text{ est l'unique valeur propre de } A.$$

Remarque 12. En pratique, il faut savoir démontrer la réciproque pour démontrer de la non diagonalisabilité et les exercices suivent le schéma suivant :

1. Déterminer le spectre de A.
   ↪ On montre que A possède une unique valeur propre (notons la λ)
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   ↪ On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose qu'elle l'est et on montre que $A = \lambda I_n$. Or c'est clairement faux ce qui permet de conclure que A n'est pas diagonalisable.

Méthode. Schéma de rédaction classique.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui possède une unique valeur propre λ. Supposons que A est diagonalisable.

A est diagonalisable donc il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D diagonale (dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A) telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Puisque λ est l'unique valeur propre de A, on a $D = \lambda I_n$. On en déduit que

$$A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_n$$

Exercice 23 : La matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

5 Compléments Hors Programmes : Réduction des endomorphismes

Toute la théorie se transpose aux endomorphismes en dimension finie.

Théoreme 24. *Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Soit $u \in E$. On note $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

- *$f(u) = \lambda u$ si et seulement si $AU = \lambda U$ (passerelle matrice-endomorphisme)*
- *λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de A. Autrement dit,* $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.
- *Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*
- *$E_\lambda(f) = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\} = \{v \in E \mid \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \in E_\lambda(A)\}$.*
- *f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.*