Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $m \in [\![0, n-1]\!]$. Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats, dont voici le protocole :

- On place un rat devant n couloirs.
- Au bout de l'un d'eux se trouve sa nourriture préférée, tandis qu'au bout des autres, il n'y a rien.
- Le rat teste aléatoirement les couloirs jusqu'à-ce qu'il trouve la nourriture. A chaque fois que le rat teste un couloir, on dit que le rat fait un *trajet*, même si il avait déjà testé ce couloir précédemment.
- L'expérience s'arrête lorsque le rat trouve la nourriture pour la première fois.

On note R_n : « le rat trouve la nourriture en moins de n trajets ».

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « le rat trouve la nourriture lors du k^{e} trajet ».

On note (H_m) l'hypothèse : le rat se souvient exactement des m derniers trajets mais pas de ceux d'avant.

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
   Autrement dit, les événements « le rat trouve la nourriture lors du k^{e} trajet » et « le rat trouve la nourriture pour la première fois lors du k^{e} trajet » coincïdent.

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Procédons par double inclusion.

   - Tout d'abord, il est clair que : $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k \subset A_k$.
   - Réciproquement, supposons que A_k est réalisé. Ainsi, le rat trouve la nourriture lors du k^{e} trajet. Ceci implique qu'il ne l'avait pas trouvée avant (sinon l'expérience se serait arrêtée avant le k^{e} trajet). Et donc l'événement $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}$ est réalisé. On a donc bien : $A_k \subset \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$..

   □

On se place dans le cas $n = 3$.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k)$ puis en déduire $\mathbb{P}(R_n)$ dans chacun des cas suivants :

   (a) sous l'hypothèse (H_0) (le rat n'a aucun souvenir des trajets précédents).

   Démonstration. On note X la variable aléatoire égale au rang du premier trajet où le rat trouve la nourriture. On peut changer l'expérience en supposant que le rat continue à visiter indéfiniment les couloirs après avoir trouvé la nourriture pour la première fois sans que cela ne change la loi de X. Ainsi, l'expérience consiste en une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (par hypothèse (H_0)), de même paramètre $p = \frac{1}{3}$. La v.a.r. X est égale au rang du premier succès. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}([X = k]) = p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$$

   Ensuite, on a :

   $$R_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

   et par incompatibilité :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} \\ &= \frac{19}{27}\end{aligned}$$

   □

   (b) sous l'hypothèse (H_1) (le rat se souvient uniquement du dernier trajet).

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $k \geq 2$. D'après la question 1 et la formule des probabilités composées :

   $$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \dots \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k)$$

   On a

   - $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{2}{3}$ (par équiprobabilité)

- par hypothèse (H_1), pour tout $j \in [\![2, k-1]\!]$, $\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = \frac{1}{2}$ (par équiprobabilité : le rat va tester un des deux couloirs qu'il ne vient pas de tester, et l'un d'entre eux ne contient pas de nourriture)
- par hypothèse (H_1), $\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{1}{2}$ (par équiprobabilité : le rat va tester un des deux couloirs qu'il ne vient pas de tester, et l'un d'entre eux contient la nourriture)

D'où :

$$\mathbb{P}(A_k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{3\times 2^{k-2}} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Enfin, comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

On peut remarquer que $\frac{5}{6} > \frac{19}{27}$, ce qui n'est pas surprenant. Plus le rat à une bonne mémoire, plus il va avoir tendance à trouver rapidement la nourriture. □

(c) sous l'hypothèse (H_2) (le rat se souvient exactement des deux derniers trajets).

Démonstration. • Comme précédemment : $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}$.

- Ensuite : $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
- Et enfin : $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(A_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$ puisque si le rat a raté la nourriture lors des deux premiers trajets, il s'en souvient lors du 3e trajet et va nécessairement aller visiter le couloir contenant de la nourriture (il n'y en a pas d'autres).

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A_k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq k \leq 3 \\ 0 & \text{si } k \geq 4 \end{cases}$$

et finalement :

$$\mathbb{P}(R_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

□

On peut rassembler ces résultats dans un tableau :

Hypothèse	$\mathbb{P}(A_1)$	$\mathbb{P}(A_2)$	$\mathbb{P}(A_3)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(A_k)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(R_n)$
(H_0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$		$\frac{2^{k-1}}{3^k}$		$\frac{19}{27}$
(H_1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3\times 2^{k-2}}$		$\frac{5}{6}$
(H_2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0		1

3. Les chercheurs possèdent trois rats. Le premier à une mémoire (H_0), le deuxième une mémoire (H_1) et le dernier une mémoire (H_2). Calculer $\mathbb{P}(R_n)$ en supposant que le rat est choisit au hasard parmi les trois.

Démonstration. On identifie les hypothèses (H_0), (H_1) et (H_2) à des évenements. Ces trois événements forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_3) &= \mathbb{P}(R_3 \cap H_0) + \mathbb{P}(R_3 \cap H_1) + \mathbb{P}(R_3 \cap H_2) \\ &= \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}_{H_0}(R_3) + \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}_{H_1}(R_3) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}_{H_2}(R_3) && \textit{(valable car, pour tout } i \in \{0,1,2\}, \ \mathbb{P}(H_i) = \tfrac{1}{3} \neq 0) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{19}{27} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{137}{162} \end{aligned}$$

□

On revient au cas général ($n \geqslant 1$ et $m \in [\![0, n-1]\!]$) et on suppose que l'hypothèse (H_m) est vérifiée.

4. Donner, en justifiant brièvement, la valeur de $\mathbb{P}(R_n)$ dans le cas où $m = n - 1$.

   Démonstration. Si le rat se souvient des $n-1$ derniers trajets, dans le pire des cas il rate la nourriture lors des $n-1$ premiers trajets et visite alors le dernier couloir qui contient la nourriture lors du n^{e} trajet. Ainsi :
   $$\mathbb{P}(R_n) = 1$$
   □

5. On suppose dans cette question que $m \in [\![0, n-2]\!]$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ en séparant les cas $1 \leqslant k \leqslant m+1$ et $k \geqslant m+2$.

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   Premier cas : $1 \leqslant k \leqslant m+1$.
   D'après la formule des probabilités composées :
   $$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\ldots\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k)$$
   - Tout d'abord, $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \dfrac{n-1}{n}$ par équiprobabilité.
   - Ensuite, pour tout $j \in [\![2, k-1]\!]$,
   $$\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = \frac{n-(j-1)-1}{n-(j-1)} = \frac{n-j}{n-j+1}$$
   En effet, si l'événement $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}}$ est réalisé, c'est que le rat a choisi un mauvais couloir lors des $j-1$ premiers trajets. Puisque $j-1 \leq k-2 \leq m$, le rat se souvient de tous ces trajets et donc il va choisir au hasard l'un des $n-(j-1)$ couloirs restants. L'un d'entre eux contient de la nourriture et tous les autres ne contiennent rien. On obtient bien la formule précédente par équiprobabilité.
   - Enfin, par un raisonnement analogue (en vérifiant que $k-1 \leq m$, ce qui est vrai) :
   $$\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{1}{n-k+1}$$

   Il vient alors :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-k+1}}{\cancel{n-k+2}} \times \frac{1}{\cancel{n-k+1}} \\ &= \frac{1}{n} && \textit{(par télescopage)}\end{aligned}$$

   Remarque

   Tout se passe ici comme si l'expérience consistait à faire des tirages sans remise dans une urne contenant 1 boule blanche et $n-1$ boules noires et que l'on calculait la probabilité d'obtenir la boule blanche pour la première fois au k^{e} tirage.

   Deuxième cas : $k \geq m+2$.
   D'après la formule des probabilités composées :
   $$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\ldots\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k)$$
   - Tout d'abord, $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \dfrac{n-1}{n}$ par équiprobabilité.
   - Ensuite, pour tout $j \in [\![2, m+1]\!]$,
   $$\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = \frac{n-(j-1)-1}{n-(j-1)} = \frac{n-j}{n-j+1}$$
   En effet, si l'événement $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}}$ est réalisé, c'est que le rat a choisi un mauvais couloir lors des $j-1$ premiers trajets. Puisque $j-1 \leq m$, le rat se souvient de tous ces trajets et donc il va choisir au hasard l'un des $n-(j-1)$ couloirs restants. L'un d'entre eux contient de la nourriture et tous les autres ne contiennent rien. On obtient bien la formule précédente par équiprobabilité.

- Ensuite, pour tout $j \in [\![m+2, k-1]\!]$,

$$\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = \frac{n-m-1}{n-m} = 1 - \frac{1}{n-m}$$

  En effet, si l'événement $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}}$ est réalisé, c'est que le rat a choisi un mauvais couloir lors des $j-1$ premiers trajets. Puisque $j-1 \geq m+1$, le rat se souvient uniquement des m derniers trajets (et donc a oublié les $j-1-m$ premiers trajets). Ainsi, il va choisir au hasard l'un des $n-m$ couloirs qu'il n'a plus en mémoire ou qu'il n'a pas encore visité. L'un d'entre eux contient de la nourriture et tous les autres ne contiennent rien. On obtient bien la formule précédente par équiprobabilité.

- Enfin, par un raisonnement analogue (puisque $k-1 \geq m+1$) :

$$\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{1}{n-m}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \cdots \times \frac{n-m-1}{\cancel{n-m}} \times \left(\prod_{j=m+2}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n-m}\right)\right) \times \frac{1}{n-m} \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{n-m-1}{n-m}\left(1-\frac{1}{n-m}\right)^{k-1-(m+2)+1} && \textit{(par télescopage)} \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-m}\right)\left(1-\frac{1}{n-m}\right)^{k-m-2} \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-m}\right)^{k-m-1}
\end{aligned}$$

□

(b) En déduire $\mathbb{P}(R_n)$.

Démonstration. On remarque à nouveau que $R_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et donc, par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{k=m+2}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{n} + \sum_{k=m+2}^{n} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-m}\right)^{k-m-1}
\end{aligned}$$

On pose $q = 1 - \dfrac{1}{n-m}$. On a bien $q \neq 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_n) &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{n} + \sum_{k=m+2}^{n} \frac{1}{n} q^{k-m-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-m-1} \frac{1}{n} q^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{n} q^{k} && \textit{(en remarquant que } \tfrac{1}{n}q^0 = \tfrac{1}{n}\textit{)} \\
&= \frac{m}{n} + \frac{1}{n}\,\frac{1-q^{n-m}}{1-q} \\
&= \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n-m}\right)^{n-m}\right)
\end{aligned}$$

Si on n'utilise pas l'astuce pour faire démarrer la somme à $k = 0$, on obtient une autre formule, un peu moins compacte :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_n) &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{n} + \sum_{k=m+2}^{n} \frac{1}{n} q^{k-m-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-m-1} \frac{1}{n} q^{k} \\
&= \frac{m+1}{n} + \frac{1}{n} q \frac{1-q^{n-m-1}}{1-q} \\
&= \frac{m+1}{n} + \frac{n-m}{n}\left(1 - \frac{1}{n-m}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{n-m-1}\right) \\
&= \frac{m+1}{n} + \frac{n-m-1}{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{n-m-1}\right)
\end{aligned}$$

□

(c) Montrer que la formule obtenue reste valable pour $m = n - 1$.

Démonstration. • D'une part : $\mathbb{P}(R_n) = 1$ lorsque $m = n - 1$.

• D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n} + \frac{n-(n-1)}{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-(n-1)}\right)^{n-(n-1)}\right) &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-(n-1)}\right)^{1}\right) \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}(1 - 1 + 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

6. On fixe l'entier m. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. *(On donne* $1 - e^{-1} \simeq 0,63$*)*

Démonstration. On utilise la formule

$$\mathbb{P}(R_n) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{n-m}\right)$$

valable pour tout entier $n > m$.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m}{n} = 0$.
- Ensuite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-m}{n} = 1$.
- Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n-m}\right)^{n-m} = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^{k}$ (par changement de variable).

  On est donc ramené à un calcul classique :

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k} = \mathrm{e}^{k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

  Or, $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} k\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -1$. Et finalement, par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k} = \mathrm{e}^{-1}$$

Finalement, on a trouvé :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = 0 + 1 \times (1 - \mathrm{e}^{-1}) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

□

Des rats d'un autre genre.

7. Les chercheurs ont trouvé comment créer des X-rats©, capables d'accroître leurs capacités de mémoire à l'infini en s'entraînant dans des labyrinthes toujours plus grand. Leur rat le plus performant, baptisé Gauss, à une mémoire de type (H_m) où $m = \lfloor \alpha n \rfloor$ avec $\alpha \in]0,1[$ (α est fixé).
   On suppose que c'est le X-rat© Gauss qui participe à l'expérience dans cette question.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1-(1-\alpha)\mathrm{e}^{-1}$.

   Démonstration. D'après la question 5b, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(R_n) = \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} + \frac{n-\lfloor \alpha n \rfloor}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n-\lfloor \alpha n \rfloor}\right)^{n-\lfloor \alpha n \rfloor}\right)$$
   Or,
$$\alpha n - 1 < \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n$$
   et donc
$$\alpha - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \leq \alpha$$
   ce qui prouve, par théorème d'encadrement, que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} = \alpha$$
   On en déduit que
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) &= \alpha + (1-\alpha)(1-\mathrm{e}^{-1}) && \textit{(même calcul qu'en question 6)}\\ &= \alpha + 1 - \alpha + (1-\alpha)\mathrm{e}^{-1}\\ &= 1-(1-\alpha)\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$
   □

   (b) En déduire la valeur minimale pour α si l'on souhaite que le X-rat© Gauss réussisse à trouver la nourriture en moins de n trajets plus de 9 fois sur 10 lorsque n est très grand.

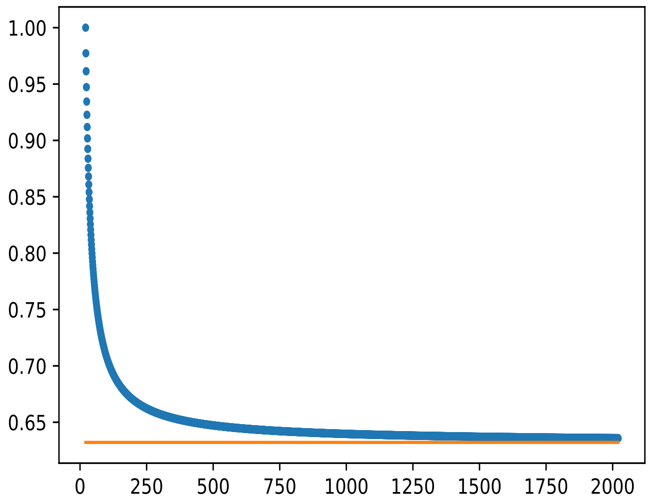
   Démonstration.
$$\begin{aligned}1-(1-\alpha)\mathrm{e}^{-1} \geq \frac{9}{10} &\iff (1-\alpha)\mathrm{e}^{-1} \leqslant \frac{1}{10}\\ &\iff 1-\alpha \leqslant \frac{\mathrm{e}}{10}\\ &\iff \alpha \geqslant 1-\frac{\mathrm{e}}{10}\end{aligned}$$
   La valeur minimale recherchée est $1-\frac{\mathrm{e}}{10}$. □

Partie informatique.

8. Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il trace les 2000 premiers termes de la suite $(\mathbb{P}(R_n))_{n\geq 21}$ sous l'hypothèse H_{20}.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(21,2022)]
C = [1-np.exp(-1) for n in A]
m = 20
U = ________________________________________________
plt.plot(A, U, '.')
plt.plot(A, C)
```

   On obtient le tracé :



Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

Démonstration. On complète le programme de la manière suivante :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(21,2022)]
C = [1-np.exp(-1) for n in A]
m = 20
U = [m/n + ((n-m)/n)*(1-(1-1/(n-m))**(n-m)) for n in A]
plt.plot(A, U, '.')
plt.plot(A, C)
```

On retrouve graphiquement le résultat de la question 6 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - e^{-1}$. ☐

9. Ecrire une fonction en **Python**, nommée **PlusPetitReussite**, qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le plus petit entier m vérifiant : $\mathbb{P}(R_n) \geqslant \frac{9}{10}$ sous l'hypothèse (H_m).
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n cet entier m minimal.

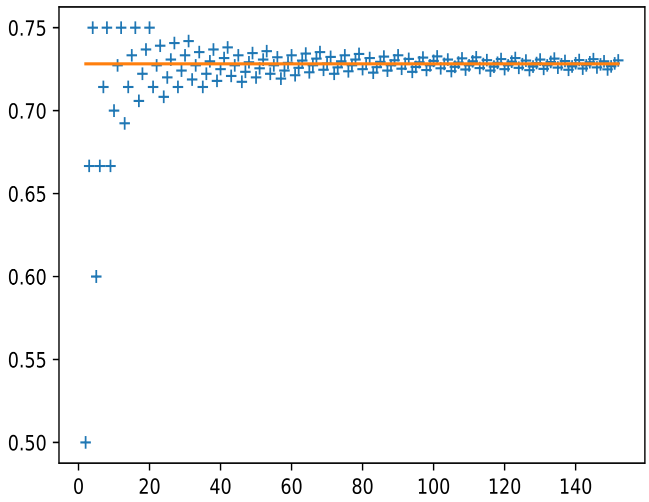
Démonstration. La fonction s'écrit :

```
def PlusPetitReussite(n) :
        m = 0
        while m/n + ((n-m)/n)*(1-(1-1/(n-m))**(n-m)) < 9/10 :
                m = m+1
        return m
```

☐

10. On affiche ci-dessous le tracé obtenu en utilisant le programme **Python** suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(2,153)]
C = [1-np.exp(1)/10 for n in A]
U = [PlusPetitReussite(n)/n for n in A]
plt.plot(A, U, '+')
plt.plot(A, C)
```



Que conjecturez-vous comme équivalent de u_n ?

Démonstration. On conjecture que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1 - \frac{\mathrm{e}}{10} \neq 0$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{10}\right) n$. □