DS3 (vB) - Correction

Problème 1 (HEC 2010, partie II)

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. ***a)*** Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}}$$

$$\boxed{\text{Enfin, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k.}$$

Commentaire

- Notons que la valeur de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$ (pour $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) n'est pas un attendu du programme. Cependant, c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Notons que : $[X_1 \leqslant k] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(les événements } [X_1 = i] \textit{ étant incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\
& = & 1 - q^k &
\end{array}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une espérance (resp. une variance) car sont des combinaisons linéaires de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. une variance).

- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1+X_2) &= \mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2) \\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{p} \\ &= \frac{2}{p} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}(X_1-X_2) &= \mathbb{E}(X_1)-\mathbb{E}(X_2) \\ &= \frac{1}{p}-\frac{1}{p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1+X_2)=\frac{2}{p} \ \text{ et } \ \mathbb{E}(X_1-X_2)=0}$$

- Les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1+X_2) &= \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \\ &= \frac{q}{p^2}+\frac{q}{p^2} \\ &= 2\,\frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ sont indépendantes.
Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1-X_2) &= \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(-X_2) \\ &= \mathbb{V}(X_1)+(-1)^2\,\mathbb{V}(X_2) \\ &= \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \ = \ 2\,\frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1+X_2)=2\,\frac{q}{p^2} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X_1-X_2)=2\,\frac{q}{p^2}.}$$

Commentaire

Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1-X_2) \neq \mathbb{V}(X_1)-\mathbb{V}(X_2)$$

□

c) Écrire une fonction **Python** qui prend en entrée le paramètre p et qui renvoie 1 si l'événement $[X_1 = X_2]$ est réalisé et 0 sinon. On simulera les variables aléatoires X_1 et X_2 dans le programme.

Démonstration. On propose la fonction suivante :

```python
def simul(p):
    X1 = rd.geometric(p)
    X2 = rd.geometric(p)
    if X1 == X2:
        return 1
    else:
        return 0
```

□

d) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[X_1 = X_2] = [X_1 - X_2 = 0]$.
- La famille $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - k = 0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1}\ p\, q^{k-1} & \\
& = & p^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} & \\
& = & p^2 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \ = \ p^2 \dfrac{1}{1-q^2} & \textit{(car } q^2 \in]0,1[\textit{)} \\
& = & p^{\cancel{2}} \dfrac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \ = \ \dfrac{p}{1+q} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

2. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $Z = \min(X_1, X_2)$ et que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[Z > k] \ = \ [\min(X_1, X_2) > k] \ = \ [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcccll}
\mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) & & & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 > k]) & \times & \mathbb{P}([X_2 > k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & (1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & \times & (1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant k]) & \\
& = & (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) & \times & (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
& = & q^k & \times & q^k & \\
& = & \left(q^2\right)^k & & &
\end{array}$$

  Enfin, comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z > 0]) = \mathbb{P}([Z \in \mathbb{N}^*]) = 1$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z > k]) = \left(q^2\right)^k}$$

- Par ailleurs, comme Z est à valeurs entières :

$$[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]).}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) \\ &= \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \\ &= \left(q^2\right)^{k-1} (1 - q^2) \\ &= \Big(1 - (1 - q^2)\Big)^{k-1} (1 - q^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi } Z \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{1-q^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1 - (1-q^2)}{(1-q^2)^2} = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}.\end{array}}$$

- Enfin, comme $T + Z = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\ &= \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) \\ &= \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{2}{1-q} - \frac{1}{(1-q)(1+q)} \\ &= \frac{2\ (1+q) - 1}{1-q^2} \ = \ \frac{1+2q}{1-q^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1+2q}{1-q^2}}$$

□

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.
En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rl} & \omega \text{ réalise } [Z=k] \ \cup \ [T=k] \\ \Leftrightarrow & Z(\omega)=k \ \texttt{OU} \ T(\omega)=k \\ \Leftrightarrow & \max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k \end{array}$$

  Procédons par disjonstion de cas :

  × si $\max(X_1(\omega),X_2(\omega)) = X_1(\omega)$:
  Dans ce cas, $\min(X_1(\omega),X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{array}{rl} & \max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k \\ \Leftrightarrow & X_2(\omega)=k \ \texttt{OU} \ X_1(\omega)=k \end{array}$$

  × si $\max(X_1(\omega),X_2(\omega)) = X_2(\omega)$:
  Dans ce cas :

$$\begin{array}{rl} & \max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k \\ \Leftrightarrow & X_1(\omega)=k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega)=k \end{array}$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rl} & \omega \text{ réalise } [Z=k] \ \cup \ [T=k] \\ \Leftrightarrow & X_1(\omega)=k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega)=k \\ \Leftrightarrow & \omega \text{ réalise } [X_1=k] \ \cup \ [X_2=k] \end{array}$$

$$\boxed{[Z=k]\cup[T=k] = [X_1=k]\cup[X_2=k]}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z=k]\cup[T=k]) & = & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([Z=k]\cap[T=k]) \\ & = & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k]) \end{array}$$

  En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :

$$[Z=k]\cap[T=k] \ = \ [X_1=k]\cap[X_2=k]$$

- De même :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_1=k]\cup[X_2=k]) & = & \mathbb{P}([X_1=k])+\mathbb{P}([X_2=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k]) \\ & = & 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k]) \end{array}$$

  En effet : $\mathbb{P}([X_1=k]) = \mathbb{P}([X_2=k])$ car X_1 et X_2 suivent la même loi.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([Z=k] \ \cup \ [T=k]) \ = \ \mathbb{P}([X_1=k] \ \cup \ [X_2=k]) \\ \text{d'où} & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \\ \text{et} & \mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k]) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demander de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $[T = k]$ et $[Z = k]$ (resp. $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
  Il peut exister $\omega \in \Omega$ tel que $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k$ et $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k$.
  Cela se produit pour tout $\omega \in \Omega$ tel que : $X_1(\omega) = X_2(\omega) = k$.

$\square$

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega) = \big(\max(X_1, X_2)\big)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. T admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Autrement dit, la v.a.r. T admet une variance ssi la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^2 \, \mathbb{P}([T = k])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k^2 \, \mathbb{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{N} k^2 \, \big(2 \, \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])\big) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N} k^2 \, \mathbb{P}([X_1 = k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2 \, \mathbb{P}([Z = k])\end{aligned}$$

  Or X_1 et Z admettent un moment d'ordre 2 car admettent une variance.
  De plus, comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega) = \big(\min(X_1, X_2)\big)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ alors :

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([X_1 = k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([Z = k])$$

- On en déduit que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^2 \, \mathbb{P}([T = k])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([T = k]) &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([X_1 = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \, \mathbb{P}([Z = k]) \\ &= 2 \, \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) \\ &= 2 \, \big(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\big) - \big(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\big) && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\ &= 2 \left(\frac{q}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2\right) - \left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^2\right) && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ &= 2 \, \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2\ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(T) & = & \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \\
& = & \left(2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\right) - \left(\dfrac{1+2q}{1-q^2}\right)^2 \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \dfrac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{(1-q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
& = & 2\ \dfrac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2\ (1+q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2\ (1+q)^3 - (2+4q+5q^2)\big) \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2\ (1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)\big) \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2q+q^2+2q^3\big) \ = \ \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens.
  L'écriture :
  $$\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$
  fournit l'égalité :
  $$\mathbb{E}(X_1^2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2$$
  qui est utilisée dans la démonstration.
- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :
  $$T + Z \ = \ X_1 + X_2$$
  Comme $T = X_1 + X_2 - Z$ alors T admet un moment d'ordre 2 comme somme de v.a.r. qui admettent un moment d'ordre 2. De la même manière, $T + Z$ admet un moment d'ordre 2.
  On a alors :
  $$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \frac{2\ q}{p^2}$$
  D'autre part :
  $$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2 \ \mathrm{Cov}(T, Z)$$
  On en déduit donc que :
  $$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) &= \frac{2\ q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2 \ \mathrm{Cov}(T,Z) \\ &= \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2 \ \mathrm{Cov}(T,Z) \end{aligned}$$
  Par la formule de Kœnig-Huygens :
  $$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(T,Z) &= \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } TZ = X_1X_2 \textit{ (*))} \\ &= \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{p}\ \frac{1}{p} - \frac{1+2q}{1-q^2}\ \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$
  ((*) $TZ = \max(X_1, X_2)\ \min(X_1, X_2) = X_1\ X_2$*)*
  En combinant tous ces résultats, on obtient :
  $$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) &= \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \right) \\ &= \frac{2\ (q-1)}{p^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \frac{2\ (q-1)}{(1-q)^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1-q^2)^2} \left(2\ (q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2 \right) \\ &= \frac{1}{(1-q^2)^2} \ \left(2q + q^2 + 2q^3 \right) \ = \ \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$

□

3. ***a)*** Préciser $(T-Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j]\cap[Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1=j]$ et $[X_2=j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z=j]\cap[Z=T])$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T-Z=|X_1-X_2|$.
Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{array}{rcl}(X_1-X_2)(\Omega) & = & \{X_1(\omega)-X_2(\omega) \mid \omega\in\Omega\} \\ & \subset & \{i-j \mid (i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2\} \ = \ \mathbb{Z}\end{array}$$

Ainsi, $(|X_1-X_2|)(\Omega)\subset\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}_+=\mathbb{N}$.

$$\boxed{(T-Z)(\Omega)\subset\mathbb{N}}$$

- Soit $j\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl}[Z=j]\ \cap\ [Z=T] & = & [\min(X_1,X_2)=j]\ \cap\ [\min(X_1,X_2)=\max(X_1,X_2)] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j]\ \cap\ [\max(X_1,X_2)=j] \\ & = & [X_1=j]\ \cap\ [X_2=j]\end{array}$$

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*,\ [Z=j]\ \cap\ [Z=T]=[X_1=j]\ \cap\ [X_2=j]}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [Z=T]) & = & \mathbb{P}([X_1=j]\ \cap\ [X_2=j]) \\ & = & \mathbb{P}([X_1=j])\ \times\ \mathbb{P}([X_2=j]) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p\ q^{j-1}\times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2}\end{array}$$

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [Z=T])=p^2\ q^{2j-2}}$$

□

b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z=j]\cap[T-Z=l])=2p^2q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl}[Z=j]\ \cap\ [T-Z=l] & = & [Z=j]\ \cap\ [T-j=l] \\ & = & [Z=j]\ \cap\ [T=j+l] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j]\ \cap\ [\max(X_1,X_2)=j+l] \\ & = & \big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big)\ \cup\ \big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big)\end{array}$$

Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big)\ \cap\ \big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big) \\ = & \big([X_1=j]\cap[X_1=j+l]\big)\cap\big([X_2=j]\cap[X_2=j+l]\big) \\ = & \varnothing\ \cap\ \varnothing\ =\ \varnothing\end{array}$$

En effet : $[X_1=j]\cap[X_1=j+l]=\varnothing$ car $j+l>j$ puisque $l\geqslant 1>0$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_1=j] \cap [X_2=j+l]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[X_1=j+l] \cap [X_2=j]\,\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_1=j]\,\big) \times \mathbb{P}([X_2=j+l]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[X_1=j+l]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[X_2=j]\,\big) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépdendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j+l-1} \ + \ p\ q^{j+l-1} \times p\ q^{j-1} \\
= \ & p^2\ q^{2j+l-2} + p^2\ q^{2j+l-2} \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) = 2\ p^2\ q^{2j+l-2}}$$

$\square$

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. On procède par disjonction de cas.

- Si $k=0$:

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q} = \frac{pq^0}{1+q}$$

- Si $k>0$:
  La famille $([X_2 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) \ &= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1 - X_2 = k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1 - i = k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1 = i+k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = i+k]) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \ \times \ p\ q^{i+k-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \ = \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=0}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ p^2\ q^k\ \frac{1}{1-q^2} \ = \ p^{\cancel{2}}\ q^k\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \quad \textit{(car } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \ \frac{p\ q^k}{1+q} \ = \ \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

- Si $k<0$:

On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{i\,=\,1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& + & \sum\limits_{\substack{i\,=\,1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \ \times \ \cancel{\mathbb{P}([X_1 = i+k])} & \textit{(}[X_1 = i+k] = \varnothing \\
& & & \textit{car } i+k \notin \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \left(\textit{car} \ \begin{array}{rl} & i+k \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & i \geqslant -k+1 \end{array} \right) \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \ \times \ p\ q^{i+k-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-k-1} \ \times \ p\ q^{i-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ q^{-k} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & \dfrac{p^2\ q^{-k}}{1+q} \ = \ \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q} & \textit{(en procédant comme} \\
& & & \textit{au point précédent)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q}}$$

□

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que :

$$[\ |X_1 - X_2| = k] \ = \ [X_1 - X_2 = k] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -k]$$

Deux cas se présentent :

× si $k \neq 0$: alors les événements $[X_1 - X_2 = k]$ et $[X_1 - X_2 = -k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) & = & \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -k]) & \\
& = & \dfrac{p\ q^k}{1+q} + \dfrac{p\ q^k}{1+q} \ = \ 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} & \textit{(car } |k| = k\textit{)}
\end{array}$$

× si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) \ = \ \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) = 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) = \dfrac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega),\ \forall l \in (T-Z)(\Omega),\ \mathbb{P}([Z=j] \cap [T-Z=l]) \ = \ \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l])$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l]) \\ = \ & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times 2\, \frac{p\, q^l}{1+q} && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = \ & q^{2j-2}\, (1-q)\, \cancel{(1+q)} \times 2\, \frac{p\, q^l}{\cancel{1+q}} \\ = \ & q^{2j-2}\, p \times 2p\, q^l \ = \ 2\, p^2\, q^{2j+l-2} \\ = \ & \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) && \textit{(d'après la } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)} \end{aligned}$$

- Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l = 0$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=0]) \\ = \ & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times \frac{p}{1+q} && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = \ & q^{2j-2}\, (1-q)\, \cancel{(1+q)} \times \frac{p}{\cancel{1+q}} \\ = \ & q^{2j-2}\, p \times p \ = \ p^2\, q^{2j-2} \\ = \ & \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) && \textit{(d'après la } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les variables } Z \text{ et } T-Z \text{ sont indépendantes.}}$$

□

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question ***3.e)***, les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes. On en déduit que :

$$\mathrm{Cov}(Z, T-Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\mathrm{Cov}(Z, T-Z)}_{0} \ = \ \mathrm{Cov}(Z,T) \ - \ \underbrace{\mathrm{Cov}(Z,Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(Z,T) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \frac{q^2}{(1-q^2)^2}}$$

- Comme $q \neq 0$, $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\rho(Z,T) & = & \dfrac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
& = & \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \ = \ \dfrac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
& = & \sqrt{\dfrac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} \ = \ \sqrt{\dfrac{q^2}{\cancel{(1-q^2)^2}}\ \dfrac{\cancel{(1-q^2)^2}}{q\ (2+q+2q^2)}} \\
& = & \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}
\end{array}$$

$$\boxed{\rho(Z,T) = \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

Démonstration.

- On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On procède par disjonction de cas :
  - × si $i < j$: alors $[Z=j] \cap [T=i] = \varnothing$.
    En effet, $Z = \min(X_1,X_2) \leqslant \max(X_1,X_2) = T$.

    $$\boxed{\text{Si } i<j,\ \mathbb{P}([Z=j] \cap [T=i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

  - × si $i = j$: alors $[Z=j] \cap [T=j] = [X_1=j] \cap [X_2=j]$.

    $$\begin{array}{rcll}
    \mathbb{P}([Z=j] \cap [T=j]) & = & \mathbb{P}([X_1=j] \cap [X_2=j]) & \\
    & = & \mathbb{P}([X_1=j]) \times \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
    & = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2} &
    \end{array}$$

    $$\boxed{\mathbb{P}([Z=j] \cap [T=j]) \ = \ p^2\ q^{2j-2}}$$

  - × si $i > j$: alors $[Z=j] \cap [T=i] = ([X_1=j] \cap [X_2=i]) \cup ([X_1=i] \cap [X_2=j])$.

    $$\begin{array}{rll}
    & \mathbb{P}([Z=j] \cap [T=i]) & \\
    = & \mathbb{P}\big(\ ([X_1=j] \cap [X_2=i]) \cup ([X_1=i] \cap [X_2=j])\ \big) & \\
    = & \mathbb{P}([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ + \ \mathbb{P}([X_1=i] \cap [X_2=j]) & \textit{(car } [X_1=j] \cap [X_2=i] \textit{ et } [X_1=i] \cap [X_2=j] \textit{ sont incompatibles)} \\
    = & \mathbb{P}([X_1=j]) \times \mathbb{P}([X_2=i]) + \mathbb{P}([X_1=i]) \times \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
    = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{i-1} + p\ q^{i-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2} &
    \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j, \ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2}.}$$

□

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ = \ \frac{\mathbb{P}([Z=j]\cap[T=i])}{\mathbb{P}([Z=j])} \ = \ \frac{\mathbb{P}([Z=j]\cap[T=i])}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)}$$

Le loi du couple (Z, T) était donnée par cas, on procède par disjonction de cas :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j, \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=j]) \ = \ p^2\ q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T=j]) \ = \ \frac{\mathbb{P}([Z=j]\cap[T=j])}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)} \ = \ \frac{p^2\ \cancel{q^{2j-2}}}{\cancel{(q^2)^{j-1}}\ (1-q^2)} \ = \ \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \ = \ \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z=j]}([T=j]) \ = \ \frac{p}{1+q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) \ = \ 2\ p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ &= \ \frac{\mathbb{P}([Z=j]\cap[T=j])}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)} \\
&= \ \frac{2\ p^2\ q^{i+j-2}}{(q^2)^{j-1}\ (1-q^2)} \\
&= \ \frac{2\ p^2 \cancel{q^{j-2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{q^{j-2}}\ (1-q^2)} \\
&= \ \frac{2\ p^{\cancel{2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{(1-q)}\ (1+q)} \\
&= \ \frac{2\ p\ q^i}{q^j (1+q)} \ = \ \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j, \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ = \ \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q}.}$$

□

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{i=1}^{N} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \\ = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \quad + \quad \sum\limits_{i=j}^{j} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \quad + \quad \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \qquad \textit{(par relation de Chasles en supposant } N > j\textit{)} \\ = & 0 \quad + \quad j\ \dfrac{p}{1+q} \quad + \quad \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \dfrac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q} \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^{N} i\ \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q} &= \frac{2\ p}{1+q} \sum_{i=j+1}^{N} i\ q^{i-j} \\ &= \frac{2\ p}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} (i+j)\ q^{(i+j)-j} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \frac{2\ p}{1+q} \left(\sum_{i=1}^{N-j} i\ q^i + \sum_{i=1}^{N-j} j\ q^i \right) \\ &= \frac{2\ p}{1+q} \left(q \sum_{i=1}^{N-j} i\ q^{i-1} + jq \sum_{i=0}^{N-j-1} q^i \right) \\ &= \frac{2\ p\ q}{1+q} \left(\sum_{i=1}^{N-j} i\ q^{i-1} + j \sum_{i=0}^{N-j-1} q^i \right) \end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles (d'ordre $N-j$ et $N-j-1$) d'une série géométrique dérivée première et d'une série géométrique toutes deux convergentes car de raison $q \in\ ]-1,1[$.

- Ainsi, la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2\ p\ q}{1+q} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} i\ q^{i-1} + j \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \right) \\ &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2\ p\ q}{1+q} \left(\frac{1}{(1-q)^2} + j \frac{1}{1-q} \right) \\ &= j \frac{p}{1+q} + \frac{2\ \cancel{p}\ q}{1+q} \frac{1+jp}{p^{\cancel{2}}} && (1-q=p) \\ &= \frac{jp^2 + 2q + 2jpq}{p(1+q)} \\ &= \frac{2q + jp(1+q)}{p(1+q)} \\ &= j + \frac{2q}{p(1+q)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La variable } D_j \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(D_j) = j + \dfrac{2q}{p(1+q)}}$$

Commentaire

- Dans cette question, on détermine $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i])$.

  Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité $\mathbb{P}$ par l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=j]}$.
  Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $[Z=j]$ est réalisé.
- Cet objet est classique en mathématiques (mais hors programme !). Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $[Z=j]$. Elle se note :
  $$\mathbb{E}(T \mid [Z=j])$$
  (cette notation n'est pas très heureuse au vu de la notation utilisée pour noter les probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :
  $$\mathbb{E}(T) \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=j]) \ \mathbb{E}(T \mid [Z=j])$$
  Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.

$\square$

Problème 2 (ESSEC II 2013, parties I et II)

L'objet du problème est l'étude de la concentration en un type de bactéries d'un bassin destiné à la baignade.

Une municipalité doit effectuer un prélèvement et l'analyser afin de décider d'autoriser ou non l'utilisation du bassin.
Dans une première partie, on étudiera des propriétés reliant la loi binomiale et la loi de Poisson. Dans une deuxième partie, on regardera la modélisation de la concentration en bactéries du bassin. Enfin, la troisième partie étudiera le principe d'un test destiné à prendre une décision d'utilisation.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment en admettant les résultats des parties précédentes.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Si elles existent, on note $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T.

I. Lien entre loi binomiale et loi de Poisson

1. Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ indépendantes et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On suppose que np_n a une limite finie strictement positive et on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$.

a) Quelle est la loi de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$?

Démonstration. • Les variables aléatoires X_k sont indépendantes.
• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$.
On en déduit que

$$\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)}$$

□

b) Soit k un entier naturel.

(i) Donner l'expression de $\mathbb{P}\big([S_n = k]\big)$ pour n supérieur ou égal à k.

Démonstration. On a $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ donc $k \in S_n(\Omega)$ et

$$\boxed{\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \tbinom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}$$

□

(ii) Que peut-on dire de la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?
Étudier la limite de $(1-p_n)^n$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration. • On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ et par hypothèse $\lambda > 0$ donc on a $np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda$, d'où $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ et finalement

$$\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

- Pour n grand :

$$(1-p_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-p_n)}$$

Or $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -p_n$, d'où $n\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n$.

On en déduit que $n\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, ce qui permet de conclure, par continuité de l'exponentielle,

$$(1-p_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

□

(iii) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$.

Démonstration. Pour n grand, on a en particulier $n \geqslant k$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}\end{aligned}$$

Or,

- $$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$$

- $$(1-p_n)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1^k = 1$$

- d'après la question précédente :

$$(1-p_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

et donc

$$\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!} n^k p_n^k \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(np_n)^k}{k!}$$

ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\tfrac{\lambda^k}{k!}}$$

□

c) On pose $N_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

(i) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N_n ?

Démonstration. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$. On en déduit alors que

$$\boxed{N_n(\Omega) = \{0, 1\}}$$

□

(ii) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([N_n = 0]\big)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}[N_n = 0] &= [\max(X_1, \ldots, X_n) = 0] \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0] \qquad \textit{(car pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ X_k(\Omega) = \{0, 1\}\textit{)}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([N_n = 0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k = 0]) \qquad \textit{(par indépendance)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1 - p_n) \\ &= (1 - p_n)^n\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}([N_n = 0]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

□

(iii) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire la limite en loi de la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration. La famille $([N_n = 0], [N_n = 1])$ est un système complet d'événements donc

- $\mathbb{P}([N_n = 0]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$
- $\mathbb{P}([N_n = 1]) = 1 - \mathbb{P}([N_n = 0]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$

On en déduit donc

$$\boxed{N_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)}$$

□

2. Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0 < \lambda \leqslant n$. On considère U une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On a donc $\mathbb{P}\big([U = 1]\big) = \dfrac{\lambda}{n}$, $\mathbb{P}\big([U = 0]\big) = 1 - \dfrac{\lambda}{n}$ et pour tout i entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}\big([U = i]\big) = 0$.

a) Écrire une fonction **Python** nommée `simulU(lam, n)` qui simule la variable aléatoire U (`lam` représente ici le réel λ).

Démonstration. On propose la fonction suivante :

```python
def simulU(lam, n):
    if rd.random() < lam / n:
        return 1
    else:
        return 0
```

En effet, $\mathbb{P}\big([U=1]\big) = \dfrac{\lambda}{n}$. $\square$

b) Montrer que pour tout réel positif u : $1 - u \leqslant e^{-u}$.

Démonstration. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi, son graphe est au dessus de toutes ses tangentes et en particulier celle en 0, d'équation $y = x + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geqslant 1 + x$$

En particulier, pour tout $u \geqslant 0$:

$$\boxed{e^{-u} \geqslant 1 + (-u) = 1 - u}$$

$\square$

c) Montrer :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = \frac{2\lambda}{n} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant 2$. Pour tout $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}\big([U=k]\big) = 0$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| &= \left| \mathbb{P}\big([U=0]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^0 \frac{1}{0!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{P}\big([U=1]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^1 \frac{1}{1!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \\ &\quad + \sum_{k=2}^{N} \left| \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| &= \left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \left| \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} \\ &= \left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \frac{\lambda}{n} \left| 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}}\end{aligned}$$

Or, $\frac{\lambda}{n} \geqslant 0$ donc

- $\left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = e^{-\frac{\lambda}{n}} + \dfrac{\lambda}{n} - 1$ d'après la question ***2.b)***
- $\left| 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}$ par croissance de l'exponentielle

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} &= e^{-\frac{\lambda}{n}} \sum_{k=2}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}{k!} - \frac{\lambda}{n} - 1 \right)\end{aligned}$$

donc, en reconnaissant une somme partielle de série exponentielle :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{\lambda}{n}} = e^{-\frac{\lambda}{n}} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - \frac{\lambda}{n} - 1 \right) = 1 - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} - e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

On en déduit que la série $\sum \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right|$ (où k décrit $\mathbb{N}$) converge et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| &= \cancel{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}} + \frac{\lambda}{n} - \cancel{1} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} + \cancel{1} - \frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} - \cancel{\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}} \\ &= 2\frac{\lambda}{n} - 2\frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \\ &= 2\frac{\lambda}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\end{aligned}$$

□

d) En déduire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

Démonstration. On utilise la question ***2.b)*** avec $u = \frac{\lambda}{n} \geqslant 0$:

$$1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \leqslant \frac{\lambda}{n}$$

et donc, en multipliant par $2\frac{\lambda}{n}$ (qui est positif), on obtient bien (d'après la question précédente) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}\big([U=k]\big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2}$$

□

3. Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0 < \lambda \leqslant n$. Soient Z, U et V trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et que V suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On observe en particulier que pour tout entier p strictement négatif $\mathbb{P}\big([Z=p]\big) = \mathbb{P}\big([U=p]\big) = \mathbb{P}\big([V=p]\big) = 0$.

a) Soit i un entier naturel fixé. En remarquant que pour tout réels a et b, on a : $|a-b| \leqslant |a| + |b|$, montrer que la série de terme général $\big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\big|$, où k décrit $\mathbb{N}$, est convergente. On note A_i sa somme, $A_i = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\big|$.

Montrer que pour tout i on a : $A_i \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\big| &\leqslant \big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big)\big| + \big|\mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\big| \\ &\leqslant \mathbb{P}\big([U=k-i]\big) + \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\end{aligned}$$

Or, les séries $\sum \mathbb{P}\big([U=k-i]\big)$ et $\sum \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)$ convergent toutes les deux, car les familles $\big([U=k-i]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big([V=k-i]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des systèmes complets d'événements.
En effet, $U(\Omega) = \mathbb{N} \subset \{k-i \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N} \subset \{k-i \mid k \in \mathbb{N}\}$.
Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il vient que

$$\boxed{\text{la série de terme général } \big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\big| \text{, où } k \text{ décrit } \mathbb{N}\text{, est convergente.}}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
A_i &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k - i] \big) - \mathbb{P}\big([V = k - i] \big)\right| \\
&= \sum_{k=-i}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k] \big) - \mathbb{P}\big([V = k] \big)\right| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k] \big) - \mathbb{P}\big([V = k] \big)\right| && \textit{(car } -i \leqslant 0 \textit{ et } U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k] \big) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} \, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| && \textit{(car } V \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)\textit{)} \\
&\leqslant 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 && \textit{(cf question } \textbf{\textit{2.d)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

□

b) Montrer que la série de terme général $A_i \, \mathbb{P}\big([Z = i] \big)$ est convergente.

Démonstration. On a :

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant A_i \mathbb{P}([Z = i]) \leqslant 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \mathbb{P}([Z = i])$
- la série $\sum \mathbb{P}([Z = i])$ est convergente (car la famille $([Z = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements) et on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par une constante non nulle donc la série $\sum 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \mathbb{P}([Z = i])$ est convergente

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum A_i \mathbb{P}([Z = i]) \text{ est convergente.}}$$

□

c) Soit k un entier naturel fixé.
Montrer que la série de terme général $\left|\mathbb{P}\big([U = k - i] \big) - \mathbb{P}\big([V = k - i] \big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i] \big)$, où i décrit $\mathbb{N}$, est convergente.

Démonstration. Par définition de A_i, on a :

$$\left|\mathbb{P}\big([U = k - i] \big) - \mathbb{P}\big([V = k - i] \big)\right| \leqslant A_i$$

D'où :

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left|\mathbb{P}\big([U = k - i] \big) - \mathbb{P}\big([V = k - i] \big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i] \big) \leqslant A_i \mathbb{P}([Z = i])$
- la série $\sum A_i \mathbb{P}([Z = i])$ est convergente d'après la question précédente

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\left|\mathbb{P}\big([U = k - i] \big) - \mathbb{P}\big([V = k - i] \big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i] \big)$, où i décrit $\mathbb{N}$, est convergente. □

d) On pose $B_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k - i] \big) - \mathbb{P}\big([V = k - i] \big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i] \big)$.

(i) Montrer que, pour $k \geqslant 2$, on a :

$$B_k = \left|1 - \frac{\lambda}{n} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathbb{P}\big([Z = k] \big) + \left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} \, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathbb{P}\big([Z = k - 1] \big) + \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}\big([V = k - i] \big) \, \mathbb{P}\big([Z = i] \big)$$

Démonstration. D'après la question précédente, B_k est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left|\mathbb{P}\big([U = k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \quad \textit{(car } k-i \geqslant 0 \iff i \leqslant k\textit{)} \\
&= \left|\mathbb{P}\big([U = 0]\big) - \mathbb{P}\big([V = 0]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = k]\big) \\
&+ \left|\mathbb{P}\big([U = 1]\big) - \mathbb{P}\big([V = 1]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = k-1]\big) \\
&+ \sum_{i=0}^{k-2} \left|\mathbb{P}\big([U = k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \qquad \textit{(car } k \geqslant 2\textit{)}
\end{aligned}$$

Or, $U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ donc

$$\left|\mathbb{P}\big([U = 0]\big) - \mathbb{P}\big([V = 0]\big)\right| = \left|1 - \frac{\lambda}{n} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right|$$

et

$$\left|\mathbb{P}\big([U = 1]\big) - \mathbb{P}\big([V = 1]\big)\right| = \left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right|$$

et

$$\sum_{i=0}^{k-2} \left|\mathbb{P}\big([U = k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big) = \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}\big([V = k-i]\big) \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big)$$

d'où

$$\boxed{B_k = \left|1 - \frac{\lambda}{n} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathbb{P}\big([Z = k]\big) + \left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathbb{P}\big([Z = k-1]\big) + \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\, \mathbb{P}\big([Z = i]\big)}$$

□

(ii) Justifier que pour $k \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\, \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([V + Z = k]\big)$.

Démonstration. Soit $k \geqslant 2$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à Z, c'est-à-dire la famille $([Z = i])_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([V + Z = k]\big) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([V + Z = k] \cap [Z = i]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([V = k-i] \cap [Z = i]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\big([V = k-i] \cap [Z = i]\big) \qquad \textit{(car } k-i \geqslant 0 \iff i \leqslant k\textit{)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\mathbb{P}\big([Z = i]\big) \qquad \textit{(par indépendance)}
\end{aligned}$$

Or, il s'agit d'une somme de termes tous positifs, donc

$$\sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}\big([V = k-i]\big)\, \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \leqslant \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\big([V = k-i] \cap [Z = i]\big)$$

D'où

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}\big([V = k - i]\big)\, \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([V + Z = k]\big).}$$

□

(iii) Montrer finalement que la série de terme général B_k, où k décrit $\mathbb{N}$, est convergente.

On admettra alors qu'on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} B_k = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\, \mathbb{P}\big([Z = i]\big)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k - i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k - i]\big)\right| \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \right) \\ = \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k - i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k - i]\big)\right| \right) \times \mathbb{P}\big([Z = i]\big) \end{aligned}$$

Démonstration. D'après les deux questions précédentes :

- pour tout $k \geqslant 2$,

$$0 \leqslant B_k \leqslant \left|1 - \frac{\lambda}{n} - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \ \mathbb{P}\big([Z = k]\big) + \left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n}\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \ \mathbb{P}\big([Z = k - 1]\big) + \mathbb{P}\big([V + Z = k]\big)$$

- les trois familles $([Z = k])_{k\in\mathbb{N}}$, $([Z = k - 1])_{k\in\mathbb{N}}$ et $([V + Z = k])_{k\in\mathbb{N}}$ sont des systèmes complets d'événements donc les trois séries $\sum \mathbb{P}([Z = k])$, $\sum \mathbb{P}([Z = k - 1])$ et $\sum \mathbb{P}([V + Z = k])$ convergent

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum B_k \text{ est convergente.}}$$

□

4. On conserve dans cette question les notations et les hypothèses de la question 3 concernant les variables aléatoires Z, U et V.

a) Montrer que la série de terme général : $\left|\mathbb{P}\big([Z + U = k]\big) - \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)\right|$ est convergente.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|\mathbb{P}\big([Z + U = k]\big) - \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)\right| \leqslant \mathbb{P}\big([Z + U = k]\big) + \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)$$

Or, $(Z+U)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $(Z+V)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ donc les familles $([Z + U = k])_{k\in\mathbb{N}}$ et $([Z + V = k])_{k\in\mathbb{N}}$ sont des systèmes complets d'événements et donc les séries $\sum \mathbb{P}\big([Z + U = k]\big)$ et $\sum \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)$ convergent.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série de terme général : } \left|\mathbb{P}\big([Z + U = k]\big) - \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)\right| \text{ est convergente.}}$$

□

b) Déduire de la question 3 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([Z + U = k]\big) - \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U = k - i]\big) - \mathbb{P}\big([V = k - i]\big)\right| \right) \mathbb{P}\big([Z = i]\big)$$

puis :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([Z + U = k]\big) - \mathbb{P}\big([Z + V = k]\big)\right| \leqslant 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant à nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z=i])_{i\in\mathbb{N}}$, on a, par indépendance,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big([Z+U=k]\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=k-i]\cap[Z=i]\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([U=k-i]\big)\mathbb{P}\big([Z=i]\big) \\ \text{et}\quad &\mathbb{P}\big([Z+V=k]\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([V=k-i]\cap[Z=i]\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\mathbb{P}\big([Z=i]\big) \end{aligned}$$

D'où

$$\Big|\mathbb{P}\big([Z+U=k]\big) - \mathbb{P}\big([Z+V=k]\big)\Big| = \left|\sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\Big)\mathbb{P}\big([Z=i]\big)\right|$$

Or, d'après la question ***3.c)***, la série de terme général $\Big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\Big| \times \mathbb{P}\big([Z=i]\big)$, où i décrit $\mathbb{N}$, est convergente. On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire pour obtenir :

$$\left|\sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\Big)\mathbb{P}\big([Z=i]\big)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \Big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\Big|\mathbb{P}\big([Z=i]\big)$$

Il suit que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{+\infty} \Big|\mathbb{P}\big([Z+U=k]\big) - \mathbb{P}\big([Z+V=k]\big)\Big| \\ \leqslant &\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \Big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\Big|\mathbb{P}\big([Z=i]\big) \\ \leqslant &\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \Big|\mathbb{P}\big([U=k-i]\big) - \mathbb{P}\big([V=k-i]\big)\Big|\right) \times \mathbb{P}\big([Z=i]\big) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{3.d)(iii)}}\textit{)} \\ \leqslant &\sum_{i=0}^{+\infty} A_i\mathbb{P}\big([Z=i]\big) \\ \leqslant &\sum_{i=0}^{+\infty} 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \mathbb{P}\big([Z=i]\big) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ \leqslant &2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z=i]\big) \\ \leqslant &2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 && \textit{(car } \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z=i]\big) = 1\textit{)} \end{aligned}$$

□

5. Soient $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$, $2n$ variables aléatoires indépendantes, telles que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$ et V_i suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned} &\Big|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([V_1+\cdots+V_n=k]\big)\Big| \\ \leqslant\quad &\Big|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k]\big)\Big| \\ +\quad &\Big|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_{n-2}+V_{n-1}+V_n=k]\big)\Big| \\ +\quad &\cdots + \Big|\mathbb{P}\big([U_1+V_2+\cdots+V_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([V_1+\cdots+V_n=k]\big)\Big| \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$u_j(k) = \mathbb{P}([U_1 + \cdots + U_j + V_{j+1} + \cdots + V_n = k])$$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}(k) - u_j(k) &= u_n(k) - u_0(k) && \textit{(par télescopage)}\\ &= \mathbb{P}\big(\,[U_1 + \cdots + U_n = k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[V_1 + \cdots + V_n = k]\,\big)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{P}\big(\,[U_1 + \cdots + U_n = k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[V_1 + \cdots + V_n = k]\,\big)\right|\\ =&\left|\sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}(k) - u_j(k)\right|\\ \leqslant&\sum_{j=0}^{n-1} |u_{j+1}(k) - u_j(k)| && \textit{(par inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité demandée. □

b) En déduire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big(\,[U_1 + \cdots + U_n = k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[V_1 + \cdots + V_n = k]\,\big)\right| \leqslant 2\frac{\lambda^2}{n}$$

Démonstration. On utilise les notations introduites à la question précédente.
Soit $K \in \mathbb{N}$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{K} \left|\mathbb{P}\big(\,[U_1 + \cdots + U_n = k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[V_1 + \cdots + V_n = k]\,\big)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{n-1} |u_{j+1}(k) - u_j(k)|\\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{K} |u_{j+1}(k) - u_j(k)|\end{aligned}$$

Fixons $j \in [\![0, n-1]\!]$. On pose

$$\begin{aligned}U &= U_{j+1}\\ V &= V_{j+1}\\ Z &= U_1 + \cdots + U_j + V_{j+2} + \cdots + V_n\end{aligned}$$

de sorte que

$$|u_{j+1}(k) - u_j(k)| = |\mathbb{P}([Z + U = k]) - \mathbb{P}([Z + V = k])|$$

Vérifions que l'on peut appliquer la question ***4.b)*** :

- $U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$
- $V \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$
- Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$
- U, V et Z sont indépendantes par lemme des coalitions (car les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_{j+1}$, $V_{j+1}, \ldots, V_n$ sont indépendantes par hypothèse)

Ainsi, la série $\sum |u_{j+1}(k) - u_j(k)|$ (où k décrit $\mathbb{N}$) converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j+1}(k) - u_j(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([Z+U=k]\big) - \mathbb{P}\big([Z+V=k]\big)\right| \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

Puisque il s'agit d'une série à termes positifs, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{K} |u_{j+1}(k) - u_j(k)| &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j+1}(k) - u_j(k)| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \\ &\leqslant 2\frac{\lambda^2}{n}\end{aligned}$$

et donc, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{K} \left|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([V_1+\cdots+V_n=k]\big)\right| \leqslant 2\frac{\lambda^2}{n}$$

ce qui prouve que la suite des sommes partielles associée à la série de terme général $\left|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([V_1+\cdots+V_n=k]\big)\right|$ est majorée. S'agissant d'une série à termes positifs, on peut conclure qu'elle converge. De plus, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([V_1+\cdots+V_n=k]\big)\right| \leqslant 2\frac{\lambda^2}{n}.}$$

□

c) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$. Conclure de ce qui précède :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([X=k]\big) - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant 2\frac{\lambda^2}{n}$$

Démonstration. On sait que :

- $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $U_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

donc, par théorème de stabilité des lois binomiales :

$$\boxed{U_1+\cdots+U_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \tfrac{\lambda}{n}\right) \text{ et donc } U_1+\cdots+U_n \text{ et } X \text{ suivent la même loi}}$$

De même,

- $V_1, \ldots, V_n$ sont indépendantes
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $V_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

donc, par théorème de stabilité des lois binomiales :

$$\boxed{V_1+\cdots+V_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ car } n\tfrac{\lambda}{n} = \lambda}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([X=k]\big) - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([U_1+\cdots+U_n=k]\big) - \mathbb{P}\big([V_1+\cdots+V_n=k]\big)\right|$$

On peut alors conclure en appliquant la question ***5.b)*** :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([X=k]\big) - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant 2\frac{\lambda^2}{n}.}$$

□

II. Modélisation de la concentration en bactéries.

Le bassin qu'on étudie est supposé de volume V, en m^3, et on effectue un prélèvement de volume ΔV, en m^3. Dans cette situation, la probabilité pour qu'une bactérie spécifique du bassin se trouve dans le prélèvement est égale à $\dfrac{\Delta V}{V}$.
Supposons que le bassin contienne n bactéries numérotées de 1 à n, $n \in \mathbb{N}^*$. On considère alors n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ à valeurs 0 ou 1 telles que $X_i = 1$ si la bactérie i se trouve dans le prélèvement et 0 sinon. Les variables en question sont supposées indépendantes.
On pose $c = \dfrac{n}{V}$ qui représente la concentration en bactéries du bassin par m^3.

6. ***a)*** Quelle est la loi de X_i pour $i \in [\![1, n]\!]$?

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X_i suit une loi de Bernoulli. De plus,

$$[X_i = 1] \text{ est réalisé } \iff \text{ la bactérie } i \text{ se trouve dans le prélèvement}$$

On en déduit d'après l'énoncé que

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \frac{\Delta V}{V}$$

Donc

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

□

b) Soit N le nombre de bactéries présentes dans le prélèvement.
Montrer que N suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\Delta V}{V}$.

Démonstration. Par définition de N, on a $N = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Or,

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right)$

Ainsi, par théorème de stabilité des lois binomiales :

$$\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\Delta V}{V}\right).}$$

□

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $a > 0$.
On appelle F sa fonction de répartition.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^{-a} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \dfrac{a^k}{k!}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathbb{P}([U \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} [U = k]\right) && \textit{(car } U(\Omega) = \mathbb{N}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}([U = k]) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathrm{e}^{-a} \frac{a^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{a^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

b) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle prenne en argument d'entrées les réels x et a et qu'elle renvoie la valeur de $F(x)$. On remarquera qu'on s'attache dans cette fonction à minimiser le nombre d'opérations.

```
1  def repartition_Poisson(x, a):
2      S = 0
3      terme = 1
4      k = 0
5      while ___________
6          S = S + terme
7          k = _________
8          terme = ____________________
9      return ___________________
```

Démonstration. On complète la fonction de la manière suivante :

```
1  def repartition_Poisson(x, a):
2      S = 0
3      terme = 1
4      k = 0
5      while k <= x:
6          S = S + terme
7          k = k + 1
8          terme = terme * (a / k)
9      return np.exp(-a) * S
```

En effet, en notant $u_k = \dfrac{a^k}{k!}$ de sorte que

$$F(x) = \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} u_k$$

on se rend compte que (u_k) est une suite récurrente vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \dfrac{a}{k} u_{k-1} \end{cases}$$

ce que l'on code en **Python** aux lignes 3 et 8 :

```
terme = 1
```

et

```
terme = terme * (a / k)
```

On commence par calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \dfrac{a^k}{k!}$ puis on termine en la multipliant par e^{-a}. $\square$

8. Soit U une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $c\Delta V$. Soit $K \in \mathbb{N}^*$ fixé.

a) Montrer : $\left|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\right| \leqslant \dfrac{2c\,(\Delta V)^2}{V}$.

Démonstration. Par incompatibilité :

$$\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) = \sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}\big([N = k]\big)$$
$$\mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big) = \sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}\big([U = k]\big)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\right| &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{K} \Big(\mathbb{P}\big([N = k]\big) - \mathbb{P}\big([U = k]\big)\Big)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{K} \left|\mathbb{P}\big([N = k]\big) - \mathbb{P}\big([U = k]\big)\right| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{K} \left|\mathbb{P}\big([N = k]\big) - \mathrm{e}^{-c\Delta V}\frac{(c\Delta V)^k}{k!}\right| && \textit{(car } U \hookrightarrow \mathcal{P}(c\Delta V)\textit{)}
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{c\Delta V}{n} = \dfrac{\Delta V}{V}$ et donc $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{c\Delta V}{n}\right)$. Ainsi, d'après la question ***5.c)*** :

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([N = k]\big) - \mathrm{e}^{-c\Delta V}\frac{(c\Delta V)^k}{k!}\right| && \textit{(la série converge)} \\
&\leqslant 2\frac{\lambda^2}{n} && \textit{(où } \lambda = c\Delta V\textit{)} \\
&\leqslant 2\frac{c^2(\Delta V)^2}{n} \\
&\leqslant 2c\frac{n}{V}\frac{(\Delta V)^2}{n} \\
&\leqslant \frac{2c(\Delta V)^2}{V}
\end{aligned}$$

$\square$

b) On suppose que $V = 1000$, V volume en m^3, et que le prélèvement est de volume égal à 1 litre soit $\Delta V = 10^{-3}$.
Trouver un majorant de l'erreur commise en approximant $\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big)$ par $\mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)$.

Démonstration. L'erreur commise en approximant $\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big)$ par $\mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)$ est :

$$\varepsilon = \big|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\big|$$

D'après la question précédente :

$$\varepsilon \leqslant \frac{2c(\Delta V)^2}{V}$$

Ainsi, en utilisant les données numériques, on obtient :

$$\boxed{\varepsilon \leqslant 2c\frac{(10^{-3})^2}{10^3} = 2c10^{-9}}$$

□

c) On suppose que la concentration dans le bassin reste inférieure à 10^6 bactéries par mètre cube, et que le prélèvement réalisé est encore de 1 litre.
Quelle est la valeur minimale du volume V garantissant que l'erreur commise dans l'approximation précédente soit inférieure à 10^{-6} ?

Démonstration. Par hypothèse : $c \leqslant 10^6$. On a alors

$$\varepsilon \leqslant 2 \times 10^6 \frac{(10^{-3})^2}{V}$$

et

$$2 \times 10^6 \frac{(10^{-3})^2}{V} \leqslant 10^{-6} \iff V \geqslant 2 \times 10^6$$

La valeur minimale du volume V garantissant que l'erreur commise dans l'approximation précédente soit inférieure à 10^{-6} est

$$\boxed{V = 2 \times 10^6 \text{ en } m^3}$$

□

On admettra dans la suite que le résultat de la question ***5.c)*** peut être amélioré de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\big([X = k]\big) - \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant 2\lambda\ \frac{\min(2, \lambda)}{n}$$

d) Montrer que si U suit une loi de Poisson de paramètre $c\Delta V$:

$$\big|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\big| \leqslant 4\frac{\Delta V}{V}$$

Démonstration. En utilisant le résultat admis, un raisonnement analogue à celui mené en question ***8.a)*** permet de montrer que

$$\big|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\big| \leqslant 2\lambda\ \frac{\min(2, \lambda)}{n}$$

où $\lambda = c\Delta V$.
Or, $\min(2, \lambda) \leqslant 2$ donc

$$\boxed{\big|\mathbb{P}\big([N \leqslant K]\big) - \mathbb{P}\big([U \leqslant K]\big)\big| \leqslant 4\frac{\lambda}{n} = 4\frac{c\Delta V}{n} = 4\frac{\Delta V}{V}}$$

□

e) On suppose toujours que le prélèvement réalisé est de un litre. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver la valeur minimale du volume V garantissant que l'erreur commise dans l'approximation précédente soit inférieure a 10^{-6}.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 4\frac{\Delta V}{V} \leqslant 10^{-6} &\iff V \geqslant 4\Delta V 10^{6} \\ &\iff V \geqslant 4 \times 10^{-3} \times 10^{6} \\ &\iff V \geqslant 4 \times 10^{3} \end{aligned}$$

La valeur minimale du volume V garantissant que l'erreur commise dans l'approximation précédente soit inférieure à 10^{-6} est

$$\boxed{V = 4 \times 10^{3} \text{ en } m^{3}}$$

Commentaire

L'inégalité admise étant meilleure que celle que nous avons démontrée, il est normal de trouver une nouvelle valeur minimale inférieure à celle trouvée en question ***8.c)***.

□

III. Construction d'une procédure de test.

Non proposé ici.