Rappels de cours

- Soient a, b et x trois réels.
$$x \geqslant a \quad \text{et} \quad x \geqslant b \iff x \geqslant \max(a, b)$$
et
$$x \leqslant a \quad \text{et} \quad x \leqslant b \iff x \leqslant \min(a, b)$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Par convention, si $k < 0$ ou si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

1 Exercices

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}([X = Y]) = \frac{1}{n}$$
2. (a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$,
$$\mathbb{P}([X + Y = k]) = \begin{cases} \dfrac{2n - k + 1}{n^2} & \text{si } k \geqslant n + 1 \\ \dfrac{k - 1}{n^2} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}$$
   (b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,
$$\mathbb{P}([X + Y = n + 1 + k]) = \mathbb{P}([X + Y = n + 1 - k])$$
3. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1 - n, n - 1 \rrbracket$,
$$\mathbb{P}([X - Y = k]) = \frac{n - |k|}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{n - k}{n^2} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \dfrac{n + k}{n^2} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, m + n \rrbracket$,
$$\mathbb{P}([X + Y = k]) = p^k (1 - p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k - i} \binom{n}{i}$$
2. Montrer, par un argument de dénombrement, que
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k - i} \binom{n}{i} = \binom{m + n}{k}$$
3. Quel théorème du cours a-t-on démontré ?

Exercice 3 : Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$$
2. Quel théorème du cours a-t-on démontré ?

Exercice 4 : Soient $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$ deux réels distincts. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = pq \frac{(1 - q)^{n-1} - (1 - p)^{n-1}}{p - q}$$

2 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=k])_{k\in[\![1,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=Y]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=Y]\cap[Y=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k])\mathbb{P}([Y=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} && (\text{car } k\in[\![1,n]\!]) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $k\in[\![2,2n]\!]$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X, c'est-à-dire la famille $([X=i])_{i\in[\![1,n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=k]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k]\cap[X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i]\cap[X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i])\mathbb{P}([X=i]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ k-n\leqslant i\leqslant k-1}} \mathbb{P}([Y=k-i])\mathbb{P}([X=i]) && \textit{(car } 1\leqslant k-i\leqslant n \iff k-n\leqslant i\leqslant k-1\textit{)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ k-n\leqslant i\leqslant k-1}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(n,k-1)} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}(\min(n,k-1)-\max(1,k-n)+1)
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.
Premier cas : $k\geqslant n+1$.
Alors $\mathbb{P}([X+Y=k]) = \frac{1}{n^2}(n-(k-n)+1) = \frac{2n-k+1}{n^2}$.
Deuxième cas : $k\leqslant n$.
Alors $\mathbb{P}([X+Y=k]) = \frac{1}{n^2}(k-1-1+1) = \frac{k-1}{n^2}$.
Et on remarque que les deux formules coincident pour $k=n+1$.

(b) Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$.

- D'une part : $\mathbb{P}([X+Y=n+1+k]) = \frac{2n-(n+1+k)+1}{n^2} = \frac{n-k}{n^2}$.
- D'autre part : $\mathbb{P}([X+Y=n+1-k]) = \frac{(n+1-k)-1}{n^2} = \frac{n-k}{n^2}$ (également valable pour $k=0$).

3. Soit $k\in[\![1-n,n-1]\!]$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements

associé à Y, c'est-à-dire la famille $([Y=i])_{i\in[\![1,n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X-Y=k]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X-Y=k]\cap[Y=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X=k+i]\cap[Y=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X=k+i])\mathbb{P}([Y=i]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1-k\leqslant i\leqslant n-k}} \mathbb{P}([X=k+i])\mathbb{P}([Y=i]) && \textit{(car } 1\leqslant k+i\leqslant n \iff 1-k\leqslant i\leqslant n-k\textit{)} \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1-k\leqslant i\leqslant n-k}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=\max(1,1-k)}^{\min(n,n-k)} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}(\min(n,n-k)-\max(1,1-k)+1)
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.
Premier cas : $k \geqslant 0$.
Alors $\mathbb{P}([X-Y=k]) = \frac{1}{n^2}((n-k)-1+1) = \frac{n-k}{n^2} = \frac{n-|k|}{n^2}$.
Deuxième cas : $k<0$.
Alors $\mathbb{P}([X-Y=k]) = \frac{1}{n^2}(n-(1-k)+1) = \frac{n+k}{n^2} = \frac{n-|k|}{n^2}$.
Et on remarque que les deux formules coincident pour $k=0$.

Correction détaillée de l'exercice 2 :

1. Soit $k \in [\![0, m+n]\!]$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X, c'est-à-dire la famille $([X=i])_{i\in[\![0,n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=k]) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k]\cap[X=i]) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i]\cap[X=i]) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i])\mathbb{P}([X=i]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i} p^k(1-p)^{m+n-k} \\
&= p^k(1-p)^{m+n-k}\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i}
\end{aligned}$$

2. On considère un ensemble E de cardinal $m+n$.
   - Par définition, le nombre de parties de E à k éléments est $\binom{m+n}{k}$.
   - Distinguons n éléments de E. Cela partitionne E en une union disjointe de deux ensembles : $E = A\cup B$ où A est de cardinal n et B est de cardinal m. On partitionne alors l'ensemble des parties à k éléments de E selon le nombre d'éléments dans A. Pour le dire autrement, choisir k éléments dans E, c'est choisir i éléments dans A et $k-i$ éléments dans B, pour un certain $i \in [\![0,n]\!]$. Le nombre de parties de E à k éléments est donc $\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}$.

On a donc bien

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{m+n}{k}$$

3. Le théorème de stabilité des lois binomiales.

Correction détaillée de l'exercice 3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X, c'est-à-dire la famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=n]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X+Y=n]\cap[X=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n-k]\cap[X=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n-k])\mathbb{P}([X=k]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Y=n-k])\mathbb{P}([X=k]) && \textit{(car } n-k \geqslant 0 \iff k \leqslant n\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

2. Le théorème de stabilité des lois de Poisson.

Correction détaillée de l'exercice 4 :

1. Soit $n \geqslant 2$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X, c'est-à-dire la famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X+Y=n]\cap[X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n-k]\cap[X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n-k])\mathbb{P}([X=k]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Y=n-k])\mathbb{P}([X=k]) && (n-k \geqslant 1 \iff k \leqslant n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} q(1-q)^{n-k-1} p(1-p)^{k-1} \\
&= pq\frac{(1-q)^{n-1}}{1-p} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^k \\
&= pq\frac{(1-q)^{n-1}}{1-p}\,\frac{1-p}{1-q}\,\frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-1}}{1-\frac{1-p}{1-q}} && \left(p \neq q \textit{ donc } \frac{1-p}{1-q} \neq 1\right) \\
&= pq(1-q)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-1}}{p-q} \\
&= pq\frac{(1-q)^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{p-q}
\end{aligned}$$