Colles de Mathématiques en E2A
Couples de v.a.r. discrètes, réduction des matrices carrées
Semaine 11 : 27 novembre - 1er décembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre IX : Couples

1.1 Définitions

- Couple de v.a.r. discrètes.
- Loi de probabilité du couple (X,Y) (ou loi conjointe des v.a.r. X et Y).
- Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes.
- Lois conditionnelles.
- Lois marginales.
- Indépendance de v.a.r. discrètes.
- Transformée d'un couple : $g(X,Y)$.
- Covariance de deux v.a.r. discrètes.
- Coefficient de corrélation linéaire.

1.2 Résultats

- Si (X,Y) est un couple de v.a.r. discrètes, alors la famille
$$([X=x]\cap[Y=y])_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$
est un sce (c'est le sce associé à (X,Y)) et on a
$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = 1$$
- Lien entre loi du couple, loi de X et lois conditionnelles de Y sachant les événements $[X=x]$.
- Lemme des coalitions.
- Théorème de transfert pour le calcul de l'espérance de $g(X,Y)$.
- Espérance d'un produit dans le cas général (thm de transfert) et dans le cas de l'indépendance.
- Formule de Koenig-Huygens. Propriétés de la covariance. Lien entre $\mathbb{V}(X+Y)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- Variance d'une somme dans le cas de l'indépendance.
- Propriétés du coefficient de corrélation linéaire.

1.3 Méthodes

Pour déterminer la loi de (X, Y) :

- On commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- On fixe $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, puis on décrit l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$. Dans le cas fini, on pourra déterminer les issues qui réalisent cet événement.

Pour déterminer la loi de X à partir de la loi de (X, Y), on utilise la formule des probabilités totales pour écrire

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Pour déterminer la loi de X à partir de la loi de Y et des lois conditionnelles, on utilise la formule des probabilités totales pour écrire

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$$

Il faut savoir déterminer la loi d'une somme ou d'un produit de deux v.a.r. , toujours en appliquant la formule des probabilités totales.

2 Chapitre X : Réduction

2.1 Définitions

- Matrices semblables.
- Valeurs propres. Spectre d'une matrice carrée.
- Vecteurs propres. Sous-espace propre d'une matrice carrée.
- Polynôme annulateur. Valeurs propres possibles.

2.2 Résultats

- Puissances de matrices semblables. Utilisation du binôme de Newton pour calculer $(\lambda I + N)^n$.
- Formule de changement de base.
- Nombre maximal de valeurs propres.
- λ valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ est non inversible ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I) < n$ (où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Cas particulier : 0 est valeur propre de A ssi A est non inversible.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le théorème du rang donne :

$$n = \dim(E_\lambda(A)) + \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$$

- Valeurs propres d'une matrice diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure.
- Lien entre valeurs propres de A et racines d'un polynôme annulateur de A. Notion de valeur propre possible.

2.3 Méthodes

1. Il faut savoir utiliser un polynôme annulateur pour déterminer A^{-1} en fonction de A.
2. Pour déterminer les valeurs propres de A, il existe deux méthodes essentielles à connaître :

(a) Le plus souvent, l'énoncé nous aide. L'aide la plus classique est de nous faire calculer un polynôme annulateur de A. On donne alors les *valeurs propres possibles de A* puis on vérifie pour chacune d'elles si il s'agit bien d'une valeur propre de A ou non (à l'aide d'un calcul de rang).

(b) Si l'énoncé ne parle pas de polynôme annulateur et ne donne aucune piste pour nous aider, on calcule toutes les valeurs propres de A d'un coup :

- Si A est une matrice 2×2, on utilise le déterminant.
- Si A est une matrice 3×3, on calcule le rang de $A - \lambda I_3$ via l'algorithme du pivot de Gauss. Lorsqu'on aboutit à une matrice triangulaire supérieure, on identifie les réels λ qui annulent au moins un coefficient diagonal.

On renvoie au cours pour les méthodes moins importantes, mais qui peuvent aider à trouver des valeurs propres.

3. Pour déterminer $E_\lambda(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. On rédigera toujours de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U \in E_\lambda(A) &\iff (A - \lambda I)U = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \\ &\iff \cdots \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire à résoudre et si λ est bien une valeur propre de A, on doit forcément trouver des variables auxiliaires. En effet, $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$ donc ce n'est pas un système de Cramer. Une fois cette équation résolue, on traduit le résultat en :

$$E_\lambda(A) = \operatorname{Vect}(\dots)$$

3 Questions de cours

1. Soit X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in \,]0,1[$). En utilisant un sce associé à X, montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) \;=\; (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$$

2. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. (cf exo 7 TD)
3. Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in \,]0,1[$. Montrer que les v.a.r. $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes. (cf exo 12 TD)
4. Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\operatorname{Sp}(C)$ et $\operatorname{Sp}(D)$.
5. Le programme suivant

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
I = np.identity(3)
A = np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+3*I))
```

renvoie

```
1
2
```

En déduire les valeurs propres de A.

6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.