Colles de Mathématiques en E2A
Applications linéaires (pas de réduction), couples de v.a.r. discrètes
Semaine 9 : 13-17 novembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre VIII : Applications linéaires

1.1 Définitions

- Application linéaire, endomorphisme.
- Isomorphisme, automorphisme, application réciproque.
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Rang d'une application linéaire.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice colonne associée à un vecteur dans une base.
- Matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
- Matrice associée à une application linéaire dans deux bases, à un endomorphisme dans une base.

1.2 Résultats

- Caractérisation des applications linéaires via l'image d'une combinaison linéaire.
- Propriétés sur la composition d'applications linéaires. L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme, $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.
- Le noyau d'une application linéaire est un sev de l'ev de départ. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.
- L'image d'une application linéaire est un sev de l'ev d'arrivée. Caractérisation de la surjectivité à l'aide de l'image.
- Résultats propres à la dimension finie : expression de l'image de f à l'aide d'une base de l'espace de départ, caractérisation de f injective/surjective/bijective via les familles de vecteurs et via le rang, si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$, théorème du rang, condition suffisante pour être un isomorphisme (injectivité + argument de dimension, ou surjectivité + argument de dimension).
- « Passerelle matrice-endomorphisme » ou isomorphisme de représentation matricielle. Il faut savoir traduire les opérations sur les vecteurs et les applications linéaires en des opérations sur les vecteurs colonnes et les matrices.

- Formule de changement de base (pour les vecteurs et pour les endomorphismes)

1.3 Méthodes

On a vu deux nouvelles méthodes pour montrer que $F \subset E$ est un sev de E.

- on peut montrer que F est le noyau d'une application linéaire.
- on peut montrer que F est l'image d'une application linéaire.

Il faut savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.

Il faut savoir calculer la matrice représentative d'un vecteur ou d'une application linéaire dans une base donnée.

La représentation matricielle d'un endomorphisme f permet de calculer simplement son noyau via la passerelle matrice-endomorphisme. Elle permet également de calculer le rang de f.

2 Chapitre IX : Couples

2.1 Définitions

- Couple de v.a.r. discrètes.
- Loi de probabilité du couple (X, Y) (ou loi conjointe des v.a.r. X et Y).
- Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes.
- Lois conditionnelles.
- Lois marginales.
- Indépendance de v.a.r. discrètes.
- Transformée d'un couple : $g(X, Y)$.

2.2 Résultats

- Si (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes, alors la famille

$$([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est un sce (c'est le sce associé à (X, Y)) et on a

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 1$$

- Lien entre loi du couple, loi de X et lois conditionnelles de Y sachant les événements $[X = x]$.
- Lemme des coalitions.

2.3 Méthodes

Pour déterminer la loi de (X, Y) :

- On commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- On fixe $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, puis on décrit l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$. Dans le cas fini, on pourra déterminer les issues qui réalisent cet événement.

Pour déterminer la loi de X à partir de la loi de (X, Y), on utilise la formule des probabilités totales pour écrire

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Pour déterminer la loi de X à partir de la loi de Y et des lois conditionnelles, on utilise la formule des probabilités totales pour écrire

$$\mathbb{P}([X = x]) \;=\; \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\, \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$$

Il faut savoir déterminer la loi d'une somme ou d'un produit de deux v.a.r. , toujours en appliquant la formule des probabilités totales.

3 Questions de cours

1. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$ est linéaire.
2. On considère l'endomorphisme
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array} \right.$$
On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.
4. Le score d'un joueur lors d'un lancer de fléchettes est modélisé par une v.a.r. X dont la loi est donnée par :
   - $X(\Omega) = \{0, 2, 5, 10\}$
   - $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{1}{5}$, $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}([X = 5]) = \dfrac{1}{5}$, $\mathbb{P}([X = 10]) = \dfrac{1}{10}$

   Écrire une fonction **Python** qui simule la v.a.r. X (cf TP 5). On représentera la méthode graphique en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en quatre sous-intervalles.
5. On considère un dé équilibré à 4 faces. On lance deux fois ce dé et on note
   - X la v.a.r. égale au plus petit des deux résultats
   - Y la v.a.r. égale au plus grand des deux résultats

   Déterminer la loi du couple (X, Y).
6. On considère un dé équilibré à 4 faces. On lance deux fois ce dé et on note
   - X la v.a.r. égale au plus petit des deux résultats
   - Y la v.a.r. égale au plus grand des deux résultats

   Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? On pourra utiliser sans démonstration les lois de X et de Y trouvées en classe.
7. Soit X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in\,]0, 1[$). En utilisant un sce associé à X, montrer que pour tout $n \geq 2$:
$$\mathbb{P}([X + Y = n]) \;=\; (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$$