Exos de cours : les 4 types d'exercices sur les couples

Exercice 1 : *(ECRICOME 2023)*

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
   Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j])$ en fonction de k et j.
   On distinguera les cas $j \leq k$ et $j \geq k + 1$.
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$
   (b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,
   $$\mathbb{P}([Y = j]) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$
5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.
6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
7. (a) Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2 - 1}{18}$.
8. (a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel `k` non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, ..., j éléments valant j, ... , jusqu'à k éléments valant k.
   Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]`.
   (b) Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y).

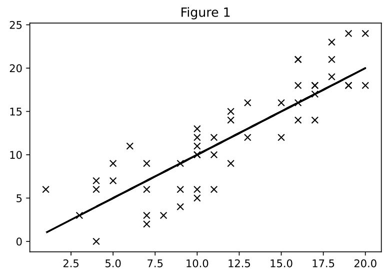
```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X = .....
    urne2 = seconde_urne(.....)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = .....
    return X,Y
```

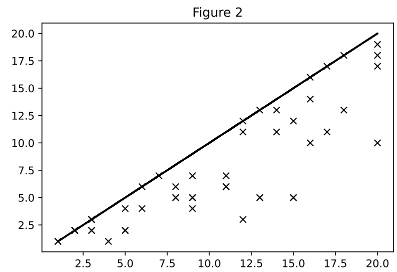
(c) On considère la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier naturel `n` non nul.

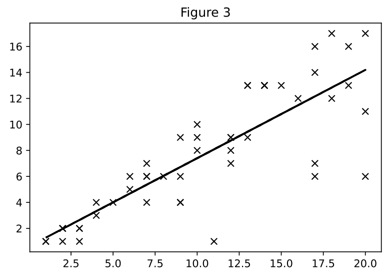
```
def fonction(n):
    liste = [0]*n
    for i in range(10000):
        j = simul_XY(n)[1]
        liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
    return liste
```

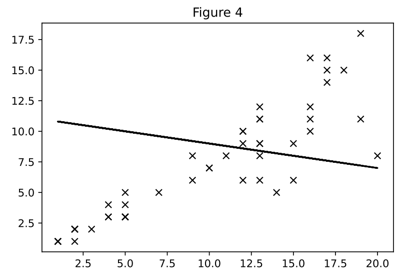
Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X, Y) à l'aide de la fonction `simul_XY` définie à la question 8b. On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnées. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.
   (a) Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?
   (b) Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire étudiés.









Exercice 2 : On considère un dé équilibré à 4 faces. On lance deux fois ce dé et on note

- X la v.a.r. égale au plus petit des deux résultats
- Y la v.a.r. égale au plus grand des deux résultats

On notera également U (resp. V) le résultat du premier (resp. second) lancer.

1. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire les lois marginales de X et de Y.
4. Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$ sans utiliser la covariance de X et de Y.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
6. Calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.
7. Calculer $\mathbb{V}(X)$.
8. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
9. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$
10. Calculer $\mathbb{V}(Y)$ en utilisant le résultat précédent.
11. Calculer $\rho(X, Y)$.
12. Ecrire une fonction **Python** qui simule X (resp. Y).
13. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 3 : On considère une pièce de monnaie qui tombe sur Face avec probabilité $p \in]0,1[$. On lance deux fois cette pièce et on note X (resp. Y) la v.a.r. égale à 1 si, au cours du premier (resp. deuxième) lancer, on est tombé sur Face, et égale à 0 sinon.

1. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Rappeler la loi de X ainsi que celle de Y.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4 : Bob est gérant d'un magasin de jeux de sociétés. On note N la v.a.r. égale au nombre de clients potentiels visitant le magasin en une journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A la fin de chaque journée, si n désigne le nombre de clients potentiels ayant visité le magasin, Bob lance n fois une pièce de monnaie qui tombe sur `Pile` avec probabilité $p \in]0,1[$. On note alors X la v.a.r. égale au nombre de `Pile` obtenus et Y la v.a.r. égale au nombre de `Face` obtenus. On pose enfin $q = 1 - p$.

1. (a) Démontrer que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda)$.
   (b) En déduire sans calcul que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(q\lambda)$.
2. (a) Montrer que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$: $[X = i] \cap [Y = j] = [X = i] \cap [N = i + j]$.
   (b) En déduire que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

Exos de cours : suite et fin

Exercice 5 : Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$). En utilisant un sce associé à X, montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$$

Exercice 6 : Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Reconnaître la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 7 : Soient $X_1, \dots, X_k$ des v.a.r. mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_k$ lorsque :

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.
3. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

Exercice 8 :*(EML 2007)* On considère une v.a.r. Y dont la loi est définie par :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{-n}$$

1. (a) Montrer que la v.a.r. $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

On considère maintenant une v.a.r. U, **indépendante de** Y, dont la loi est définie par :

$$U(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{2}$$

Enfin, on note $T = U \times Y$.

2. Démontrer que T est une v.a.r. discrète dont on déterminera la loi.
3. Montrer que les variables Y et T ne sont pas indépendantes puis montrer que $\mathbb{E}(YT) = \mathbb{E}(Y)\, \mathbb{E}(T)$.

Exercice 9 : Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ (avec $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$). Déterminer la loi de $Z = XY$.

Exercice 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$. Notons $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([X > n])$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([U > n])$.
   (c) Comment peut-on exprimer $[U = n]$ en fonction d'événements de la famille $([U > k])_{k\in\mathbb{N}}$?
   (d) En déduire la loi de U.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([V \leq n])$ puis $\mathbb{P}([V > n])$.
   (b) Démontrer : $\mathbb{P}([V = n]) = \mathbb{P}([V > n-1]) - \mathbb{P}([V > n])$.
   (c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\sum\limits_{n=1}^{m} n\mathbb{P}([V = n]) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V > n]) - m\,\mathbb{P}(V > m)$.
   (d) En déduire que V admet une espérance et la calculer.

Exercice 11 : Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{i+j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!}$$

Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$.

Exercice 12 : Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0,1[$. Montrer que les v.a.r. $Y_1 = X_1X_2$ et $Y_2 = X_2X_3$ ne sont pas indépendantes.

Loi d'un couple de v.a.r. discrètes finies

Exercice 13 :

1. Pourquoi le tableau suivant définit-il la loi d'un couple ?

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3
-1	0,1	0	0,1
0	0,1	0,5	0,1
1	0,1	0	0

2. Comment choisir p pour que le tableau suivant définisse la loi d'un couple (X,Y) ?

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4
-1	0,1	0	0,1	p
0	0,1	0,1	0,1	$\frac{p}{2}$
1	0,1	0	0	$\frac{p}{2}$

Exercice 14 : On s'intéresse au lancer de deux dés tétraédriques, l'un bleu et l'autre rouge. Chacun des dés possède donc quatre faces numérotées de 1 à 4.

On suppose que lorsqu'on jette un dé :

- il ne peut retomber que sur une face (et non sur un sommet ou une arête) ;
- on note le numéro de la face cachée du dé.

Pour le dé bleu, les quatre faces ont tous la même probabilité d'apparition. Pour le dé rouge, la probabilité p_i d'obtenir le numéro i est proportionnelle à i.

On note, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, N_i l'événement « Obtenir le numéro i ». Ainsi, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $\mathbb{P}(N_i) = p_i$.

1. Calculer les probabilités p_i, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$.
2. On lance les deux dés et on note les résultats. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire prenant pour valeur le chiffre apparu sur le dé bleu (resp. rouge). Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
3. Représenter la loi par un tableau.

Exercice 15 : On considère une urne contenant 2 boules blanches et 2 boules noires. On tire simultanément 2 boules au hasard dans cette urne. On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues et Y la v.a.r. égale au nombre de boules noires obtenues.

1. Que peut-on dire de la v.a.r. $Z = X + Y$?
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et la représenter par un tableau.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Lois marginales, lois conditionnelles d'un couple

Exercice 16 :*(EML 2009)* Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathbb{P}([T = k])$ et rappeler l'espérance et la variance de T.
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

- On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
- On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $([Y = 1]) \cup ([Z = 1])$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i, on note :

- B_i : « la i^{e} boule tirée est blanche »
- N_i : « la i^{e} boule tirée est noire »

3. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $\mathbb{P}([X = k]) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$.
   (b) Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$
   (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.
4. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathbb{P}(([X = k]) \cap ([Y = 1]))$
   (On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)
   (b) En déduire : $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   On admet que l'espérance de Y existe et que : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.
5. Donner la loi de Z et son espérance.
6. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.
7. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{Cov}(Y, Z)$ à l'aide de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 17 : On suppose que la loi conjointe d'un couple de deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, est

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = \frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

Déterminer les lois marginales de X et Y.

Exercice 18 : Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On définit $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Trouver la loi du couple (U, V). En déduire les lois marginales.
2. Trouver les lois conditionnelles de X et Y sachant U et V.

Exercice 19 : On considère un couple (X, Y) de v.a.r. discrètes tel que

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
- Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, p'\right)$ où $p' \in]0, 1[$.

1. Soit $(j, k, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que : $0 \leq j \leq k \leq n$. Montrer que
$$\binom{k}{j}\binom{n}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}.$$
2. Montrer que la loi marginale de Y est $\mathcal{B}(n, pp')$.

Fonctions d'un couple de v.a.r. discrètes

Exercice 20 : On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par :

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3
-1	0	0,05	0,1
0	0,1	0	0,1
1	0	0,05	0,2
2	0,3	0	0,1

1. Donner les lois marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi de $U = \max(X, Y)$.
4. Donner la loi de $V = \min(X, Y)$.
5. Donner la loi de $S = X + Y$.
6. Donner la loi de $T = X - Y$.
7. Donner la loi de $D = |X - Y|$.

Exercice 21 : On considère un lot de 10 dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sur ces 10 dés, cinq sont équilibrés, les cinq autres sont truqués. Pour un dé truqué, la probabilité d'obtenir 1 quand on le lance sera prise égale à $\frac{5}{6}$.

1. On choisit un dé au hasard, on le lance 3 fois et on obtient 3 fois la face numéro 1. Quelle est la probabilité de l'événement : "le dé choisi est truqué" ?
2. On effectue des lancers successifs d'un dé équilibré et on arrête dès que l'on a obtenu pour la première fois la face numéro 1. Soit X la v.a.r. égale au nombre de lancers effectués avec ce dé. On effectue des lancers successifs d'un dé truqué et on arrête dès que l'on a obtenu pour la première fois la face numéro 1. Soit Y la v.a.r. égale au nombre de lancers effectués avec ce dé.
   (a) Déterminer la loi de X et calculer l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer la loi de Y et calculer l'espérance et la variance de Y.
3. Calculer la probabilité de l'événement $[X = Y]$.
4. Calculer la probabilité de l'événement $[X < Y]$.

5. On prend un dé truqué, on effectue des lancers successifs et on arrête dès que l'on a obtenu pour la première fois une face ne portant pas le numéro 1. Soit Z la v.a.r. égale au nombre de lancers effectués avec ce dé. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.r. $X + Z$ et calculer son espérance.

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un couple (X, Y) de v.a.r. discrètes tel que

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
- $\forall (i,j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, n+1]\!], \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = c(2i + j)$, où c est un réel fixé.

1. Que vaut c ?
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Donner la loi de $S = X + Y$ puis de $T = X - Y$.

Exercice 23 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, définie par :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{1}{6}, \mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{1}{3}, \mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On considère les variables $S = X + Y$ et $P = XY$.

1. Vérifier que la loi donnée est bien une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi du couple (S, P).
3. Déterminer les lois marginales du couple (S, P).
4. S et P sont-elles indépendantes ?

Exercice 24 : *(ESC 2008)*

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec probabilité $\dfrac{1}{3}$.
Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec probabilité $p \in]0, 1[$.
Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants.

On effectue le jeu suivant :
Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne PILE.

- *Si A et B ont fait PILE simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent.*
- *Sinon, le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série "en solitaire".*

Par exemple, si A a obtenu PILE pour la première fois à son 7-ième lancer et si B a obtenu PILE pour la première fois à son 11-ième lancer, B doit payer à A la somme de 4 euros.

On note :

- X la v.a.r. prenant pour valeur le nombre de lancers effectués par le joueur A ;
- Y la v.a.r. prenant pour valeur le nombre de lancers effectués par le joueur B ;
- $Z = Y - X$.

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre.
   Préciser $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et les valeurs de $\mathbb{P}([X = k])$, $\mathbb{P}([Y = k])$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
2. (a) Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1 - 3p}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{6p^2 - p + 1}{p^2}$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{P}([Y = k]) = \frac{p}{1 + 2p}$ et en déduire $\mathbb{P}([Z = 0])$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}([Z = n]) = \dfrac{p}{1 + 2p}(1 - p)^n$ et en déduire $\mathbb{P}([Z > 0])$.
   En déduire $\mathbb{P}([Z < 0])$ puis interpréter les événements $[Z = 0]$, $[Z > 0]$, $[Z < 0]$.

Exercice 25 : Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et des boules noires. Plus précisément :

- U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires,
- U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages avec remise de la boule tirée en procédant comme suit :

- Le premier tirage s'effectue dans U_1.
- Si au n-ième tirage on obtient une boule blanche alors le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans U_1.
- Si au n-ième tirage on obtient une boule noire alors le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans U_2.

On désigne par :

- p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage,
- X_n la v.a.r. qui vaut 1 si la boule obtenue au n-ième tirage est blanche, 0 sinon.
- S_n est le nombre total de boules blanches obtenues au bout de n tirages.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n. En déduire l'expression de p_n en fonction de n, et la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Pour n supérieur ou égal à 1, donner la loi de X_n. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
4. Les v.a.r. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
5. Exprimer S_n en fonction des $X_k,\ 1 \leq k \leq n$. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$.

Exercice 26 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $M = \min(X, Y)$ et son espérance.
2. Déterminer la loi de $T = |X - Y|$.
3. Soit $(i,j) \in M(\Omega) \times T(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([M = i] \cap [T = j])$. On pourra distinguer les cas $j = 0$ et $j \neq 0$.
   Les variables M et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 27 : On lance un dé indéfiniment. On note X la v.a.r. égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6. On note Y la v.a.r. égale au nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du premier 6, pour obtenir le deuxième 6.

1. Déterminer les lois de X, de Y, leurs espérance et leurs variances.
2. Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
3. Déterminer la loi de Z.
4. Interpréter ce que représente Z. Retrouver directement la loi de Z.

Espérance d'une fonction d'un couple et covariance

Exercice 28 : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages sans remise d'une boule, et on note X le plus petit numéro obtenu et Y le plus grand.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
4. calculer $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
5. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
6. Interpréter le signe de la covariance de X et Y.
7. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
8. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

Exercice 29 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-n, n]\!])$. Calculer $\mathrm{Cov}(X, X^2)$.

Exercice 30 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un couple (X,Y) de v.a.r. discrètes tel que

- $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$.
- $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n+1]\!], \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = c(2i+j)$, où c est un réel fixé.

Calculer $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 31 :*(ECRICOME 2000)* On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).

On suppose que $\quad p \geq \dfrac{1}{4} \quad r \geq \dfrac{1}{4} \quad u \geq \dfrac{1}{4} \quad$ et que $\quad p+r+u=1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, $\mathbb{V}_n$) l'événement : "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".

On appelle X (resp. Y) la variable aléatoire prenant pour valeur le rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).

On définit alors la variable $D = |X-Y|$ prenant pour valeur le nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

1. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.
2. Soient $i,j \in \mathbb{N}^*$. En distinguant les cas $i=j$, $i<j$ et $i>j$, exprimer l'événement $[X=i] \cap [Y=j]$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X,Y).
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité :
$$\mathbb{P}([D=k]) = \frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right].$$
5. Montrer que D admet une espérance.

Exercice 32 :

Une urne contient n boules noires (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et deux boules blanches.

On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule, sans remise. On note :

- X la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche ;
- Y la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la seconde boule blanche ;
- pour tout $i \in [\![1,n+2]\!]$, N_i (*resp.* B_i) l'événement « le $i^{\text{ième}}$ tirage amène une boule noire (*resp.* blanche) ».

1. (a) Préciser $X(\Omega)$. Décrire, pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $[X=k]$ à l'aide des événements N_i et B_i.
   (b) Montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) Déterminer la loi couple (X,Y).
   (c) En déduire la loi de Y.
   (d) Calculer l'espérance de Y.
3. Calculer la covariance de (X,Y). Commenter son signe.

Espérance conditionnelle (`Hors-programme, tombe parfois au TOP 3`)

Exercice 33 : Soient X et Y deux v.a.r. définies sur un même espace probabilisé, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = k]$ réalisé le réel $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$ défini par :

$$\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) = \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$$

1. Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{[X=k]}(Y) \ \mathbb{P}([X = k])$$

On dispose de n urnes $U_1, \dots U_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne.
On note X la v.a.r. égale au numéro de l'urne choisie et Y la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée.

2. Quelle est la loi de X ?
3. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$. Préciser l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = k]$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (b) Déduire de la question 1 l'espérance de Y.
4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
5. (a) Déterminer la loi de Y sous forme d'une somme.
   (b) Déterminer la variance de Y en fonction de n.