

Exercices de cours

Exercice 1 : (d'après EDHEC 2016) Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$$

1. Montrer que f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de f_n .

Exercice 2 : On considère la fonction $g : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} dt$. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.

Exercice 3 : Etudier la nature des intégrales suivantes.

- | | | |
|----------------------------|--|--|
| 1. $\int_1^{+\infty} t dt$ | 3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ | 5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ |
| 2. $\int_0^{+\infty} 1 dt$ | 4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$ | 6. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ |

Exercice 4 : (Hors-programme) Etudier la nature des intégrales suivantes.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------|
| 1. $\int_0^2 \frac{1}{t-2} dt$ | 2. $\int_0^1 \ln(t) dt$ |
|--------------------------------|-------------------------|

Exercice 5 : Etudier la nature des intégrales suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt$ | 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- t } dt$ |
|---|---|

Exercice 6 : Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$.

Exercice 7 : (Calcul de la primitive de \ln s'annulant en 1) Soit $x > 0$. Calculer $\int_1^x \ln(t) dt$.

Exercice 8 : Calculer les intégrales suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---|
| 1. $\int_1^2 \ln(t) dt$ | 3. $\int_1^2 t^k \ln(t) dt$ | 5. $\int_1^2 \frac{t \ln(t)}{(t^2+1)^2} dt$ |
| 2. $\int_1^2 t^2 \ln(t) dt$ | 4. $\int_1^2 (\ln(t))^2 dt$ | 6. $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt$ |

Exercice 9 : Calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3} dt$.

Exercice 10 : Soit $\alpha > 0$. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt$

2. $\int_0^{+\infty} \alpha t e^{-\alpha t} dt$

3. $\int_0^{+\infty} \alpha t^2 e^{-\alpha t} dt$

Exercice 11 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $u = e^t$

2. $I_2 = \int_1^2 \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + e^t}} dt$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1 + e^t}$

4. $I_4 = \int_0^1 \frac{du}{1 + \sqrt{u}}$ à l'aide du changement de variable $v = \sqrt{u}$

5. $I_5 = \int_1^2 \frac{\ln(u) du}{u + u(\ln(u))^2}$ à l'aide du changement de variable $v = \ln(u)$

Exercice 12 : On pose $I = \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$. Montrer que $I = \frac{1}{4} \int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}} du$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 13 : Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $u = e^t$.

Exercice 14 : Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 15 : Calculer $\int_{-2}^2 t^4 dt$.

Exercice 16 : Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$.

Exercice 17 : Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+1)^3} dt$?

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Montrer que pour tout n , on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 19 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$

2. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t + \ln(t)}$

Exercice 20 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \qquad 2. \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

Exercice 21 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt \qquad 2. \int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^2 + 2t - 1} dt \qquad 3. \int_{-\infty}^0 \frac{1 - 2t + 3t^2}{4 - 3t + t^2 - 5t^3} dt$$

Exercice 22 : (d'après EDHEC 2003)

On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

- (a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n .
 (b) En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
- (a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.
 (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{1}{n^2}$$

- (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Techniques de calcul d'intégrales

Exercice 23 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^2 t e^{2t} dt & 3. \int_2^4 \frac{1}{1-x^2} dx & 5. \int_0^1 \frac{t}{2t+1} dt \\ 2. \int_1^e \ln(x) dx & 4. \int_1^4 \sqrt{x} \ln(x) dx & 6. \int_0^1 x \sqrt{3x+1} dx \end{array}$$

Exercice 24 : (d'après ECRICOME 1998)

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}$. A l'aide du changement de variables $u = e^{-t}$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_0^x e^{-t} \ln(1+e^t) dt = g(e^x) + 2 \ln 2$$

Exercice 25 : Déterminer la nature des intégrales suivantes, et donner leur valeur en cas de convergence.

$$\begin{array}{l} 1. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt \\ 2. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \\ 3. I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad \text{puis} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2} dx. \end{array}$$

Intégrale fonction de ses bornes

Exercice 26 : On considère la fonction $f : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

- (a) Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
 - (b) Démontrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f' .
 - (c) En déduire, pour tout $x \in]0, +\infty[$, une expression simple de $f(x)$.
2. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 27 : On considère la fonction H définie sur \mathbb{R}_+ par $H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$.

- Montrer que H est bien définie sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , et calculer $H'(x)$, pour tout $x \geq 0$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xH(x) = 0$.
- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} H(t) dt$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $H(0)$.

Relation de récurrence entre intégrales

Exercice 28 : (d'après ECRICOME 2005) On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

- Calculer I_0, I_1 .
- Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
- Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

- En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
- Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
- Donner alors les valeurs de a, b, c .

Exercice 29 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale I_n .
- Calculer I_0 puis I_1 (on pourra penser à une intégration par parties).

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $aI_n = nI_{n-1}$.

4. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Exercice 30 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $u_n = \sqrt{n} I_n$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est convergente. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.

3. Calculer, pour tout $n \geq 1$, la valeur de I_n .

4. (a) Montrer que, pour tout réel x : $\ln(1+x^2) \leq x^2$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$: $I_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

(c) En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha 4^n}{\sqrt{n}}$.

Suites d'intégrales

Exercice 31 : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$.

1. Calculer I_0 .

2. Montrer que (I_n) est décroissante.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Déterminer la limite de la suite (I_n) .

4. (a) En effectuant une IPP, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

(b) Étudier la convergence de la suite (nI_n) .

Comparaison série intégrale

Exercice 32 : On définit la fonction :

$$f : \begin{cases} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 2$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x) dx$.

(a) En utilisant l'inégalité de la question 1, démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$$

(b) On définit la fonction :

$$F : \begin{cases} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases}$$

Calculer la dérivée de F . En déduire une expression de I_n en fonction de n .

(c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

(a) Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$$

(b) En déduire que : $\forall n \geq 3, I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) Démontrer que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 33 : Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{t \ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$?

2. Déterminer le tableau de variations de f .

3. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$.

4. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ où $\beta > 1$.

Critères de comparaison (fonctions continues positives)

Exercice 34 : (d'après ESC 2002) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, f_n(x) = \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2}$$

On définit également sur \mathbb{R}_+^* la fonction h par :

$$\forall x > 0, h(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. Montrer que f_n et h sont continues sur \mathbb{R}_+^* et étudier leur signe.

2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

(b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exo, on note K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x) dx$$

3. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 h(x) dx$ est convergente.

- (b) En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que : $K = - \int_0^1 h(u) du$.
- (c) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx$ converge et est égale à $2K$.
- (d) En déduire également que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ converge et vaut 0.
4. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $|f_n(x)| \leq |h(x)|$.
En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
- (b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2}$.
- (c) En déduire successivement : $0 \leq \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x)) dx \leq \frac{K}{n+1}$,
et : $-\frac{K}{n+1} \leq \int_0^1 (h(x) - f_n(x)) dx \leq 0$.
- (d) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 0$.
5. Calculer, pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$?

Exercice 35 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$ | 5. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx$ | 9. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt$ |
| 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ | 6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$ | 10. $\int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-\alpha t}}{1+t^2} dt$ |
| 3. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ | 7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ | |
| 4. $\int_1^3 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}} dx$ | 8. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^n} dt$ | |

Exercice 36 :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

\mathcal{C} désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

- (a) Montrer que f est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- (b) Étudier les variations de f et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer la courbe \mathcal{C} .
- (c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.
2. Montrer que l'aire comprise entre la courbe \mathcal{C} et ses asymptotes est finie.
3. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$.
- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
- (b) Montrer que pour $n \geq 1$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- (c) Montrer que pour $n \geq 1$, on a : $\forall x \geq 0, f(x) = f(x) e^{-nx} + \sum_{k=1}^n x e^{-kx}$.

En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

4. On pose pour tout $u > 0$, $J_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} - 1} dx$ et $K_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} + 1} dx$.

- Montrer que, pour tout $u > 0$, les intégrales J_u et K_u sont convergentes.
- Calculer, pour tout $u > 0$, J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1 .
- Etablir que $J_1 - K_1 = 2J_2$.
- Déduire des questions précédentes une relation simple entre J_1 et K_1 , puis entre J_u et K_u .

Exercice 37 : Déterminer un équivalent de $\frac{x^3 e^x}{(1 + e^x)^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{(1 + e^x)^2} dx$.

Intégrales à paramètre

Exercice 38 : On pose, quand l'intégrale converge, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$.

- Montrer que le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$.
- Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
- Pour $x > 0$, justifier l'existence de $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + t^x)}$.
 - Pour $x > 0$ et $t \geq 1$, simplifier $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1 + t^x}$, puis calculer $g(x)$.
 - En déduire que, pour tout $x > 0$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Montrer que : $\forall x > 0, 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x + 1}$.
 - En déduire la limite et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 39 : Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1 + t} dt$.

- Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) + f(x + 1) = \frac{1}{x + 1}$.
- Donner le sens de variation de f .
(indication : pour tout $0 < a < b$, montrer que $f(b) < f(a)$)
- En utilisant la question 1, déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Démontrer que : $\forall x > 0, f(x) + f(x + 1) \leq 2 f(x)$.
 - Démontrer que : $\forall x > 0, f(x) + f(x + 1) \geq 2 f(x + 1)$.
 - En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 40 : On considère la fonction $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1 + t} dt$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Quel est le sens de variation de f ?
- Soient a, b deux réels tels que $0 < a \leq b$, montrer que :

$$0 \leq f(a) - f(b) \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

En déduire que f est continue.

- Déterminer $f(x) + f(x + 1)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 41 : On considère la fonction $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^x}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Démontrer que f est décroissante.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Grands classiques

Exercice 42 : (d'après HEC 2002, EDHEC 2008, HEC 2018, EDHEC 2022)

Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) , on pose $B(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : $B(p, q) = B(q, p)$.
2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir la relation : $B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$.
3. Calculer, pour tout entier naturel n , $B(0, n)$.
4. En déduire la valeur de $B(p, q)$, pour tout couple d'entiers naturels (p, q) .
5. En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{p+k+1}$, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 43 : Étude de la fonction Γ

On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente, et calculer sa valeur.
2. (a) Déterminer, pour tout réel x , la valeur de $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t}$.
 (b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, pour tout réel x .
 (c) (Hors programme) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
 (d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie sur $]0, +\infty[$.

3. (a) Calculer $\Gamma(1)$.
 (b) Établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement positif x .
 En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (c) Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.
 En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

Ici, on déborde du programme

Exercice 44 : On pose $I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{1-x} dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln x dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'intégrale I_n est convergente.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $-1 \leq \frac{x \ln x}{1-x} \leq 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leq I_n \leq 0$, puis la limite de I_n , lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\sum_{k=1}^n J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I = -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + I_{n+1}$.
6. Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur de I à 10^{-2} près.

Exercice 45 : Soient a et b deux réels strictement positifs et $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- Montrer que, pour $\alpha > 0$, on a : $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t} dt$.
- En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ existe et vaut $f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.
- Montrer l'existence $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx$ et donner sa valeur.
- Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 46 : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

- Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
(b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$.
(a) Montrer que les suites $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
(b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$.
- (a) Calculer I_n en fonction de n .
(b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Montrer que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.
(c) Déterminer la valeur de α .

Exercice 47 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du$ et $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$.

- Montrer que J_0 est convergente, et calculer sa valeur.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n existe. À l'aide d'une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1} , déterminer la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
- Soit $x \in]0, 1[$. En posant $u = -(n+1) \ln(t)$, calculer $\int_x^1 (t \ln(t))^n dt$.
- En déduire la valeur de $I_n = \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.