Exercices de cours

Exercice 1 : *(d'après* `EDHEC 2016`*)*

On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer N^2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2 : *(d'après* `EDHEC 2016`*)*

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A et la matrice dans $\mathcal{B}'$ est notée T.
On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; T^n = n2^{n-1}\, T - (n-1)\, 2^n\, I$$

Démontrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; A^n = n2^{n-1}\, A - (n-1)\, 2^n\, I$$

Exercice 3 : *(d'après* `EDHEC 2016`*)*

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On note $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
3. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer P^{-1}. Donner une interprétation de cette matrice.
5. Quel est le lien entre les trois matrices précédentes ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut A^n ?

Exercice 4 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AU pour $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AU_i pour $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 : Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique (notée $\mathcal{B}$) est :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On note :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.
   (b) En déduire le spectre de M.
2. Notons v_1 l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1) = V_1$. On définit de même v_2 et v_3.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer N, la matrice représentative de φ dans $\mathcal{B}'$.
3. (a) Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (b) Quel lien y a-t-il entre les matrices M, N et P ?
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer M^n.

Exercice 6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 7 : Déterminer le spectre des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 8 : Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{Sp}(C)$ et $\mathrm{Sp}(D)$.

Exercice 9 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -8 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de B.

Exercice 10 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Le programme suivant

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
I = np.identity(3)
A = np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+3*I))
```

renvoie

```
1
2
```

En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 11 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation $AU = U$ d'inconnue $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 12 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $P^{-1}AP$ puis déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 13 : Pour chacune des matrices suivantes, trouver une (ou des) valeur(s) propre(s) à vue :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
6. $A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. $A_7 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 15 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a vu que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

Exercice 16 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a vu que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17 :*(d'après* `EDHEC 2016`*)* Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynome annulateur de A. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 18 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable. Démontrer que A^2 est diagonalisable.

Exercice 19 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable. Soit B une matrice semblable à A. Démontrer que B est diagonalisable.

Exercice 20 : La matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 21 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. (a) La matrice A est-elle inversible ?
   (b) En déduire une valeur propre de A.
3. (a) Calculer A^2.
   (b) Déterminer alors un polynôme annulateur de A.
4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
5. (a) Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :
$$A = PDP^{-1}$$
   (b) Que représente la matrice P ?
   (c) Déterminer P^{-1}.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n.

Exercice 22 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $E_2(A)$ et $E_5(A)$.
2. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible tel que :
$$A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$
On explicitera P et P^{-1}.
5. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Quelle propriété a A^n ? Pourquoi ?

Exercice 23 : La matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Polynômes annulateurs

Exercice 24 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 25 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$, où I désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, préciser la matrice inverse A^{-1}.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer les sous-espaces propres de A.
6. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Suite de vecteurs colonnes

Exercice 26 : On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonnes : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que V_1, V_2, et V_3 sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
2. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Justifier la relation : $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
3. On se propose de calculer les matrices colonnes X_n définies par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$$

   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.
   (c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+2} & = & u_{n+1} \\ v_{n+2} & = & 4v_n \\ w_{n+2} & = & -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

   En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
   (d) Donner finalement, pour tout entier naturel n, la matrice X_n en fonction de n.

Matrice d'un endomorphisme

Exercice 27 : *(d'après* `EDHEC 2007`*)* Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$\varphi(M) = M + {}^tM$$

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Écrire la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.
   (c) En déduire que φ est non bijectif.
   (d) Montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer A^2 et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = 2^{n-1}A$.

3. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(E_1,\ E_2 + E_3,\ E_4\right)$. Établir alors : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (c) On note, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, $V_k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(E_k)$ et on pose $F = \mathrm{Vect}\left(V_1, V_2 + V_3, V_4\right)$. Établir que $F = E_2(A)$.
   (d) Donner, pour résumer, les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Diagonalisation des matrices carrées

Exercice 28 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs des réels a, b, c pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.

Exercice 29 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 5A^2 - 8A + 4I_3$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Diagonaliser A à l'aide de cette base.

Exercice 30 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Montrer que A est diagonalisable, puis déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P de deuxième ligne égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 31 :*(extrait de* `EML 2007`*)* On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer
   - une matrice diagonale D
   - une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   telles que $A = PDP^{-1}$.

Etude de suites récurrentes

Exercice 32 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n sous forme de tableau matriciel.
4. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
   (b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 33 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on donne : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître pour tout entier naturel n, le produit MX_n. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de M et leur sous-espace propre associé.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) On pose $e_1' = (1,-2,4)$, $e_2' = (1,1,1)$ et $e_3' = (0,1,2)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ est :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
5. (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

Un peu de théorie

Exercice 34 : Soit A une matrice carrée d'ordre n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note I la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si $\lambda - a$ est une valeur propre de $A - aI$. En déduire le spectre de $A - aI$ en fonction du spectre de A.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice semblable à A.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de B. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(B)$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ? Autrement dit, deux matrices de même spectre sont-elles semblables ?
   On pourra considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrices aléatoires

Exercice 35 : On considère deux v.a.r. X_1 et X_2 indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0,1[$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que A soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 36 : On considère trois v.a.r. X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$. On pose, pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, $Y_k = X_k - 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_3 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que A soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 37 : On considère trois v.a.r. X, Y et Z indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On définit la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'événement $[\mathrm{rg}(A) \leq 1]$ est certain.
2. (a) Donner une expression de A^2 en fonction de A.
   (b) Quelle est la probabilité que $A^2 = A$?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$?
3. On note T la variable aléatoire égale au nombre de valeurs propres de A.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T.
   (b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?
4. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'au moins une des colonnes de A soit égale à la somme des deux autres colonnes ?
   Indication : on pourra utiliser la formule du crible et la formule suivante valable pour des entiers naturels m, n_1, n_2 vérifiant $m \leq n_1 + n_2$:
   $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k} = \binom{n_1+n_2}{m}$$

Racine carrée d'une matrice

Exercice 38 :*(EML 2000)* Soit a un réel. On considère les matrices :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.
   (b) Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale D d'ordre 3 et une matrice inversible P d'ordre 3 telles que : $J = PDP^{-1}$.
   (c) En déduire que, pour tout réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre 3 que l'on calculera, telle que : $M_a = PD_aP^{-1}$.
   (d) Quel est l'ensemble des réels a tels que M_a soit inversible ?
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice K_a de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $K_a^2 = M_a$.

(a) Soit a un réel et K_a une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $K_a^2 = M_a$.

i. Montrer que K_a commute avec M_a, puis que K_a commute avec J.

ii. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de J est vecteur propre de K_a.

iii. Etablir qu'il existe une matrice diagonale Δ_a d'ordre 3 telle que $K_a = P\Delta_a P^{-1}$ et montrer que $\Delta_a^2 = D_a$.

iv. En déduire que : $a \geqslant 2$.

(b) Réciproquement, montrer que, pour tout réel $a \geqslant 2$, il existe une matrice K_a de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $K_a^2 = M_a$.

(c) Conclure.