Études d'intégrales : résumé des méthodes

Dans les exercices, les intégrales se présentent sous différentes formes. Réussir à analyser les objets considérés permet de savoir quelle méthode appliquer, ce qui est illustré dans cette fiche.

I. Intégrales $\int_a^b f(t)\ dt$ sur un segment $[a,b]$

1. **Intégration « à vue »** : on trouve une primitive F de f, et :

$$\int_a^b f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. À défaut : **intégration par parties**.

Théorème 1

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et $a, b \in I$.

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

Commentaire

Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions $(u \times v')$:

- ▷ dont l'une sera dérivée $(u \rightsquigarrow u')$,
- ▷ et l'autre sera primitivée $(v' \rightsquigarrow v)$.

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_1^2 t\ \ln(t)\ dt$.

La fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur le **segment** $[1,2]$, l'intégrale est donc bien définie.

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = t & u(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On obtient :

$$\int_1^2 t\ \ln(t)\ dt \ = \ \left[\ \frac{t^2}{2}\ \ln(t)\ \right]_1^2 \ - \ \frac{1}{2}\int_1^2 t\ dt \ = \ \dots$$

3. À défaut : **intégration par changement de variable**.

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq I$.

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\ \varphi'(u)\ du}$$

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t + 1}$ avec le changement de variable $\boxed{u = e^t}$.

$$\left|\begin{array}{lcl} t = \varphi(u) = \ln(u) & & u = e^t \\ dt = \dfrac{1}{u} du & & du = e^t dt \\ t = 1 & \iff & u = e^1 \\ t = 2 & \iff & u = e^2 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$. On obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} \ = \ \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\ \frac{1}{u}\ du \ = \ \dots$$

4. À défaut (rare) : on essaie de répondre à la question sans calculer l'intégrale - sauf si la question est « calculer l'intégrale » auquel cas il doit bien y avoir une astuce...

II. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Il s'agit d'étudier $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ où f est continue sur un intervalle I, a est un élément fixé de I, et x est un élément quelconque de I.

1. Si on sait son cours : H est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Ainsi, H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I$, $H'(x) = f(x)$.

2. Sinon (méthode plus générale !) : comme f est continue sur I, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \int_a^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_a^x = F(x) - F(a)$$

La fonction H est $\mathcal{C}^1$ sur I car F l'est et : $\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x)$. ($F(a)$ est une *constante*, donc disparaît par dérivation selon x)

III. Généralisation : intégrale fonction de ses bornes

Il s'agit d'étudier $H : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$ où f est continue sur un intervalle I, et $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle J.

La fonction H `N'EST PAS` une primitive de f.

1. Sauf exception, **on ne cherche pas** à calculer l'intégrale qui définit $H(x)$.

2. Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$$

3. Toutes les propriétés de H découlent de cette égalité.

La fonction H est dérivable sur J car les composéees $F \circ u$ et $F \circ v$ le sont. Et, pour tout $x \in J$:

$$\begin{array}{rcccc} H'(x) & = & v'(x) \times F'(v(x)) & - & u'(x) \times F'(u(x)) \\ & = & v'(x) \times f(v(x)) & - & u'(x) \times f(u(x)) \end{array}$$

Exemples :

$$\begin{array}{rclcl} H : x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ dt & \rightsquigarrow & H(x) = F(2x) - F(x) \\ & & & \rightsquigarrow & H'(x) = 2\ f(2x) - f(x) \\ H : x & \mapsto & \displaystyle\int_{-x}^{x^2} f(t)\ dt & \rightsquigarrow & H(x) = F(x^2) - F(-x) \\ & & & \rightsquigarrow & H'(x) = 2x\ f(x^2) + f(-x). \end{array}$$

IV. Suites (I_n) où $I_n = \int_a^b f_n(t)\ dt$

1. **Sens de variation** : on calcule :

$$I_{n+1} - I_n = \int_a^b\ f_{n+1}(t)\ dt - \int_a^b\ f_n(t)\ dt = \int_a^b\ (f_{n+1}(t) - f_n(t))\ dt$$

puis on étudie le signe de l'intégrale obtenue ce qui permet de conclure quant à la monotonie de cette suite (I_n).
Plus précisément, on procède en 2 étapes :

- ▷ on détermine le signe sur $[a, b]$ de $(f_{n+1}(t) - f_n(t))$,
- ▷ on conclut par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant).

2. **Recherche de la limite** : on cherche à majorer/minorer/encadrer l'intégrale par une/des intégrales calculables en se débarrassant de ce qui « gêne », mais en conservant ce qui « bouge » (donc dépend de n), puis on utilise le théorème d'encadrement.

Par exemple pour montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on procède classiquement en 2 étapes :

- ▷ on écrit : $\forall t \in [a, b],\ 0 \ \leqslant\ f_n(t) \ \leqslant\ g_n(t)$.
- ▷ on conclut par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant).

$$0 \ \leqslant\ \int_a^b\ f_n(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b\ g_n(t)\ dt = \dots$$

où g_n est une fonction continue sur le **segment** $[a, b]$ dont on peut aisément déterminer l'intégrale sur $[a, b]$.

3. **Calcul de** I_n : uniquement s'il est demandé ! Il se fait le plus souvent à partir d'une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n (ou I_n et I_{n-1}) obtenue la plupart du temps à l'aide d'une intégration par parties.

V. Intégrales dépendant d'un paramètre

Il s'agit d'étudier : $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^b\ f(t, x)\ dt$.

La fonction H `N'EST PAS` une primitive de f.

- Sauf exception, **on ne cherche pas** à calculer l'intégrale qui définit $H(x)$.
- Aucun théorème au programme ne dit quoi que ce soit sur la dérivabilité de H (toute tentative de dérivation sous le signe d'intégration est à proscrire !).

1. **Ensemble de définition** : on cherche les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale existe.

2. **Sens de variation** : on choisit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leqslant x_2$ et on détermine le signe de :

$$H(x_2) - H(x_1) = \int_a^b\ (f(t, x_2) - f(t, x_1))\ dt$$

3. Pour le reste, on suit l'énoncé ...

VI. Intégrales généralisées

Tous les résultat précédents ont été présentés dans le cadre d'intégrales sur un segment. Pour autant, ils sont tous réutilisables dans le cas où l'on étudie une intégrale généralisée.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
  - ▷ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** $+\infty$.
  - ▷ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ **converge** si la quantité $\displaystyle\int_a^{B} f(t)\, dt$ admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$. On a alors :
  $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{B \to +\infty} \int_a^{B} f(t)\, dt}$$
  - ▷ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ **diverge**.
- Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty, b]$.
  - ▷ On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** $-\infty$.
  - ▷ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ **converge** si la quantité $\displaystyle\int_A^{b} f(t)\, dt$ admet une limite finie lorsque $A \to -\infty$. On a alors :
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt = \lim_{A \to -\infty} \int_A^{b} f(t)\, dt}$$
  - ▷ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ **diverge**.

MÉTHODO **Étude de la convergence d'une intégrale impropre**

Par exemple : étude de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ lorsque $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$ (on procéderait façon similaire pour $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$).

- ▷ On commence toujours par rappeler que f est continue sur $[a, +\infty[$.
- ▷ **1ère méthode :** Chercher à appliquer un théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives. Attention cependant : ces théorèmes ne donnent que le caractère convergent ou divergent, et sont donc inutiles si le but est de déterminer la valeur de l'intégrale.
  - Penser à vérifier que l'on a bien : $\forall x \in [a, +\infty[, f(x) \geqslant 0$.
  - Si f est négative, on considère $\int_a^{+\infty}(-f)$ et on se ramène au point précédent.
  - Si f change de signe, on peut essayer de considérer l'intégrale de $|\, f \,|$: c'est une intégrale de fonction positive, on peut donc lui appliquer les théorèmes de comparaison ; de plus si elle converge, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ converge absolument, donc converge. Cependant cette méthode ne fonctionne pas toujours : il existe des intégrales qui convergent mais ne convergent pas absolument.
- ▷ **2ème méthode :** Revenir à la définition. On y a recours si la méthode précédente ne fonctionne pas, ou s'il faut trouver la *valeur* de l'intégrale.
  - On introduit $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^{B} f(t)\, dt$ admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
  - Puisque f est continue sur $[a, +\infty[$, f est aussi continue sur le segment $[a, B]$: on peut alors appliquer une des techniques classiques d'intégration sur un segment (intégration à vue, intégration par parties ou changement de variable).
  - Une fois une valeur ainsi obtenue pour $\displaystyle\int_a^{B} f(t)\, dt$, il reste à examiner si cette valeur converge, ou non, lorsque $B \to +\infty$.

VII. Primitives classiques

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

Commentaire

Il ne faut pas confondre x^α (avec $\alpha \neq -1$) et a^x (avec $a > 0$) :
- pour tout $x > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. × $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\lvert u(x) \rvert) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

- Il faut penser à la forme $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ dès que la fonction à intégrer contient une puissance. Par exemple :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\ dt = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}\ dt = \int_0^1 t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\ dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 2t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\ dt = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \left[\frac{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} \right]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

- Cette primitive classique est parfois présentée sous la forme suivante :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^\beta}$ (avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto -\dfrac{1}{\beta - 1} \dfrac{1}{(u(x))^{\beta-1}} + \lambda$

(il faut notamment connaître les primitives de $\dfrac{u'}{u^2}$ et de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)