Table des matières

1 Rappels : équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = 0$
2. $y' + 4y = 0$
3. $y' + 7y = 0$
4. $y' = y$
5. $y' = 3y$
6. $y' = -y$

Exercice 2 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = 2$
2. $y' + 4y = 1$
3. $y' + 7y = -1$
4. $y' = y - 2$
5. $y' = 3y + 5$
6. $y' = -y - 7$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = t$
2. $y' + 4y = t^2$
3. $y' + 7y = t + 2$
4. $y' = y + 3t^2 - t$
5. $y' = 3y + 5t^2 - t + 3$
6. $y' = -y - 7t$

Exercice 5 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = t\mathrm{e}^{t}$
2. $y' + 4y = t\mathrm{e}^{-4t}$
3. $y' + 7y = (t + 2)\mathrm{e}^{-t}$
4. $y' = y + (t + 3)\mathrm{e}^{2t}$
5. $y' = 3y + (-t + 3)\mathrm{e}^{-2t}$
6. $y' = -y - 7t\mathrm{e}^{-t}$

Exercice 6 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' - 4y = t\mathrm{e}^{t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 4y = t\mathrm{e}^{t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' - 4y = t\mathrm{e}^{t} \\ y(0) = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y' + 4y = t\mathrm{e}^{-4t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y' + 4y = t\mathrm{e}^{-4t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y' + 4y = t\mathrm{e}^{-4t} \\ y(0) = -1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y' + 7y = t + 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} y' + 7y = t + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} y' + 7y = t + 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

2 Rappels : équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2

Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' - 4y = 0$
4. $y'' + 2y' = 0$
5. $y'' + 2y' + y = 0$
6. $y'' - 2y' - 3y = 0$

Exercice 8 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 9 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2$
2. $y'' - 6y' + 9y = 1$
3. $y'' - 4y = -1$
4. $y'' + 2y' = -2$
5. $y'' + 2y' + y = 5$
6. $y'' - 2y' - 3y = -7$

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = t$
2. $y'' - 6y' + 9y = t^2$
3. $y'' - 4y = t + 2$
4. $y'' + 2y' = 3t^2 - t$
5. $y'' + 2y' + y = 5t^2 - t + 3$
6. $y'' - 2y' - 3y = -7t$

Exercice 11 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = te^t$
2. $y'' - 6y' + 9y = e^{3t}$
3. $y'' - 4y = e^{2t}$
4. $y'' + 2y' = te^{-t}$
5. $y'' + 2y' + y = t^2e^t$
6. $y'' - 2y' - 3y = te^{-t}$

Exercice 12 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = te^t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = te^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3t} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -7t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -7t \\ y(0) = -\frac{14}{3} \\ y'(0) = \frac{7}{3} \end{cases}$

9. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -7t \\ y(0) = \frac{7}{3} \\ y'(0) = -\frac{14}{3} \end{cases}$

3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

3.1 Définition et écriture matricielle

Definition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *système différentiel linéaire d'ordre n à coefficients constants* toute équation différentielle linéaire de la forme

$$(E) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

où

- les $a_{i,j}$ sont des constantes réelles, appelées *coefficients* du système différentiel
- x_1, ..., x_n désignent des fonctions inconnues, que l'on supposera être dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier

Une *solution de* (E) est un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \forall t \in \mathbb{R}, \ x_i'(t) = a_{i,1}x_1(t) + a_{i,2}x_2(t) + \cdots + a_{i,n}x_n(t)$$

On peut réécrire le système différentiel (E) sous la forme matricielle

$$X' = AX$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemple 1.

1. Le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) \\ y'(t) & = & & - & y(t) \end{array} \right.$$

se traduit matriciellement par : $X' = AX$ où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

se traduit matriciellement par : $X' = AX$ où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3.2 Résolution directe de systèmes différentiels linéaires

3.2.1 Résolution explicite des systèmes différentiels linéaires diagonaux

Résoudre un système diagonal revient à résoudre plusieurs équations différentielles indépendamment les unes des autres.

Exercice 13 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcll} x' & = & 2x & \\ y' & = & & 3y \end{array} \right.$$

Exercice 14 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lclll} x' & = & -x & & \\ y' & = & & 2y & \\ z' & = & & & -2z \end{array} \right.$$

3.2.2 Résolution explicite des systèmes différentiels linéaires triangulaires supérieurs

Les systèmes triangulaires se résolvent par remontées successives, en injectant les solutions trouvées au fur et à mesure.

Exercice 15 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcccc} x' & = & x & + & y \\ y' & = & & & y \end{array} \right.$$

Exercice 16 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcccccc} x' & = & -2x & & & + & 2z \\ y' & = & & - & 3y & - & z \\ z' & = & & & & - & 3z \end{array} \right.$$

Démonstration. Il existe $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) & = C_1 e^{-2t} - 2C_3 e^{-3t} \\ y(t) & = C_2 e^{-3t} - C_3 t e^{-3t} \\ z(t) & = C_3 e^{-3t} \end{cases}$$

□

Exercice 17 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcccccc} x' & = & -2x & - & 3y & + & z \\ y' & = & & - & 2y & + & z \\ z' & = & & & & - & 2z \end{array} \right.$$

Démonstration. Il existe $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) & = C_1 e^{-2t} - 3C_2 t e^{-2t} + C_3 t(-\frac{3}{2}t + 1) e^{-2t} \\ y(t) & = C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t} \\ z(t) & = C_3 e^{-2t} \end{cases}$$

□

3.3 Points d'équilibres et trajectoires

Definition 2. On appelle *point d'équilibre* ou *état d'équilibre* ou *solution stationnaire* du système différentiel $X' = AX$ toute solution constituée de fonctions constantes. On identifiera une telle solution avec un n-uplet de $\mathbb{R}^n$.

Théoreme 1. *Soit* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *On a l'équivalence :*

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est un point d'équilibre de } X' = AX \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Remarque 1. On dit aussi qu'un état d'équilibre est une .

Proposition 2. *La matrice A est inversible si et seulement si l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$ est le point* $(0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Definition 3. On appelle *trajectoire* du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Remarque 2. La trajectoire d'un équilibre est réduite à un point.

Definition 4. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution du système différentiel linéaire $X' = AX$. Soit $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ *converge* vers $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ si,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i$$

Si il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire *diverge.*

Remarque 3. Toute solution stationnaire a une trajectoire convergente.

Méthode. Pour montrer que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ est divergente, il suffit de trouver une coordonnée x_i qui vérifie $\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = +\infty$ ou $\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = -\infty$.

Exercice 18 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire $X' = AX$.
3. Expliciter une solution convergente non stationnaire ainsi qu'une solution divergente.
4. Montrer que toute trajectoire convergente converge vers un point d'équilibre.

3.4 Résolution indirecte de systèmes différentiels linéaires

3.4.1 Résolution d'un système différentiel linéaire par changement de variable

Lemme 3. *Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application dérivable et soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors l'application $Y = P^{-1}X$ est dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Autrement dit,

$$\boxed{(P^{-1}X)' = P^{-1}X'}$$

Méthode. On considère un système différentiel $X' = AX$ et on suppose que A est semblable à une matrice plus « simple » (diagonale ou triangulaire), que l'on note S. Soit P une matrice inversible telle que $A = PSP^{-1}$. On pose $Y = P^{-1}X$. Il faut savoir refaire le raisonnement par équivalence suivant :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PSP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = SP^{-1}X \\ &\iff (P^{-1}X)' = SP^{-1}X \\ &\iff Y' = SY \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à résoudre un système différentiel linéaire plus simple que celui initialement considéré. Une fois que Y est déterminé, on trouve X via la formule $X = PY$.

Fait remarquable : il n'est pas nécessaire de connaître explicitement P^{-1} pour faire les calculs.

3.4.2 Résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable

Exercice 19 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le script **Python**

```
A = np.array([[0,-1,0],[-1,0,0],[1,1,1]])
print(al.matrix_power(A,2))
```

   renvoie

```
[[1 0 0]
 [0 1 0]
 [0 0 1]]
```

   En déduire un polynôme annulateur de A puis les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de A.
3. Montrer que la matrice A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissant telles que $A = PDP^{-1}$.
4. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$. On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = DY$.
5. En déduire les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$.

Démonstration.
1. Le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. On en déduit que les valeurs propres possibles de A sont 1 et -1. On vérifie que ce sont des valeurs propres de A en vérifiant que $A - I$ et $A + I$ ne sont pas inversibles.
2. $$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

   La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :
   - génératrice de $E_1(A)$
   - libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

   c'est donc une base de $E_1(A)$ et $\dim(E_1(A)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) = 2$.

   La famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est :
   - génératrice de $E_{-1}(A)$

- libre car constituée d'un unique vecteur non nul

c'est donc une base de $E_{-1}(A)$ et $\dim(E_{-1}(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 1$.

3. Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est libre. Or, $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On en déduit que A est diagonalisable. On pose
$$P = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \end{aligned}$$

5. Notons $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned} Y' = DY &\iff \left\{\begin{array}{lcl} y_1' &=& y_1 \\ y_2' &=& y_2 \\ y_3' &=& -y_3 \end{array}\right. \\ &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} y_1(t) &=& C_1 e^t \\ y_2(t) &=& C_2 e^t \\ y_3(t) &=& C_3 e^{-t} \end{array}\right. \end{aligned}$$
d'où, d'après ce qui précède,
$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P\begin{pmatrix}C_1 e^t\\ C_2 e^t\\ C_3 e^{-t}\end{pmatrix} \\ &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix}-C_1 e^t + C_3 e^{-t}\\ C_1 e^t + C_3 e^{-t}\\ C_2 e^t - C_3 e^{-t}\end{pmatrix} \end{aligned}$$
Interprétons cette formule en termes d'éléments propres de la matrice A. Notons
$$U_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad U_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$
et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, de telle sorte que pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, le vecteur U_k est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k.
Soit $t \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix}-C_1 e^t + C_3 e^{-t}\\ C_1 e^t + C_3 e^{-t}\\ C_2 e^t - C_3 e^{-t}\end{pmatrix} \\ &= C_1 e^t \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} U_3 \end{aligned}$$

□

Le calcul fait à l'exercice précedent est en fait généralisable à n'importe quelle matrice diagonalisable.

Théoreme 4. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.*

- *On fixe $(U_1, \dots, U_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.*
- *On note, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, λ_i la valeur propre de A associée au vecteur propre U_i. Les λ_i sont non nécessairement distincts, chaque valeur propre apparaît autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.*

Alors l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ est

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{ t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} U_n \mid (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} U_i \mid (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{\lambda_1 t} U_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} U_n \right) \end{aligned}$$

Remarque 4. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et S_0 est un espace vectoriel.

Méthode. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable revient à déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun de ses sous-espaces propres. En concaténant chacune de ces bases, on obtient une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Definition 5 (Problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire)**.** Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Résoudre le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = V \end{cases}$$

c'est trouver les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ qui vérifient la condition initiale $X(t_0) = V$, *i.e.*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad x_i(t_0) = v_i$$

Remarque 5. On a exprimé le problème de Cauchy à un instant quelconque t_0 plutôt qu'en 0 pour gagner en généralité dans cette partie, mais la plupart du temps on choisit $t_0 = 0$ dans les exos.

Théoreme 5 (Théorème de Cauchy linéaire dans le cas diagonalisable)**.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy*

$$(P) \qquad \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = V \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Démonstration. On reprend les notations du théorème précédent. Fixons

$$X : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} U_i, \qquad \text{où } (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$$

une solution générale de $X' = AX$. Par propriété d'une base, les coordonnées de V dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ existent et sont uniques : notons les $(v_1, \dots, v_n)$.

On a

$$\begin{aligned} X(t_0) = V &\iff \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t_0} U_i = V \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t_0} U_i = \sum_{i=1}^{n} v_i U_i \\ &\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t_0} = v_i \\ &\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad C_i = v_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t_0} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t_0} \mathrm{e}^{\lambda_i t} U_i \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{e}^{\lambda_i (t-t_0)} U_i \end{aligned}$$

□

A retenir. Résoudre un problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire $X' = AX$ revient à calculer les coordonnées d'un certain vecteur dans une base de vecteurs propres de A.

Corollaire 6. *L'application linéaire*

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_0 & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X(0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et $\dim(S_0) = n$.

Exemple 2. Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et résolvons le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 3 (on remarque ici que A est diagonalisable car c'est une matrice carrée d'ordre 2 qui possède 2 valeurs propres distinctes). De plus,

- $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1
- $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3

Ainsi, les solutions générales de $X' = AX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto C_1 \mathrm{e}^t U_1 + C_2 \mathrm{e}^{3t} U_2, \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff C_1 U_1 + C_2 U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} C_1 & + & C_2 & = & 2 \\ -C_1 & + & C_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcll} C_1 & + & C_2 & = & 2 & \\ & & 2C_2 & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcll} 2C_1 & & = & 2 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ & 2C_2 & = & 2 & \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} C_1 & & = & 1 \\ & C_2 & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy (P) est

$$X : t \mapsto \mathrm{e}^t U_1 + \mathrm{e}^{3t} U_2$$

i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t}$$
$$x_2(t) = -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t}$$

On remarque que $\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t) = +\infty$ donc la trajectoire associée à cette solution est divergente.

Théoreme 7. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.*

- *Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit dans ce cas que les points d'équilibres du système sont* stables.
- *Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.*

3.4.3 Résolution guidée dans le cas où la matrice A est trigonalisable

Exercice 20 : On considère le système différentiel linéaire

$$(E) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & 2y & - & 2z \\ y' & = & -4x & - & 3y & + & 4z \\ z' & = & -2x & & & + & z \end{array}\right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Définir une matrice A telle que
$$(E) \iff X' = AX$$
2. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P^{-1} A P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.
3. (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1) : \varphi' = \varphi$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2) : \varphi' = -\varphi$.
   (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto ct\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3) : \varphi' = -\varphi + c\mathrm{e}^{-t}$.
4. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$. Montrer que α est solution de $(\mathscr{E}_1)$, γ est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et β est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.
5. En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + \lambda_3 \mathrm{e}^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)\mathrm{e}^{-t} + \lambda_3 \mathrm{e}^t \end{cases}$$
6. En déduire une solution non stationnaire qui converge vers l'unique état d'équilibre du système (E).

3.5 Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

où $b \neq 0$. En posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, on obtient l'équivalence

$$(E) \iff X' = AX$$

Calcul du spectre de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_2 \text{ est non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \\ &\iff P(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

où $P(X)$ est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E).

Cas où $P(X)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2. Alors A possède deux valeurs propres distinctes et donc A est diagonalisable. Notons

- $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre r_1
- $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre r_2

D'après le cours, les solutions générales de $X' = AX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} U_1 + \lambda_2 e^{r_2 t} U_2, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

En prenant la première coordonnée, on en déduit que les solutions générales de (E) sont de la forme

$$y : t \mapsto \lambda_1 u_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 u_2 e^{r_2 t}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

et on a retrouvé la formule de première année à condition que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$.
On a $AU_1 = r_1 U_1$ donc

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -bu_1 - av_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Supposons que $u_1 = 0$. On trouve alors $v_1 = r_1 \times 0 = 0$ et donc $U_1 = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Cela contredit le fait que U_1 est un vecteur propre.

Cas où $P(X)$ admet une racine double r_0. Alors A possède une unique valeur propre et donc A n'est pas diagonalisable. Il faut trigonaliser A (cf l'exo de la partie précédente) pour retrouver la formule de première année.