

Table des matières

1 Rappels sur les fonctions de répartition	2
1.1 Définition et propriétés	2
1.2 Méthode pour démontrer qu'une fonction est une fonction de répartition	2
2 Les v.a.r. à densité : le point de vue des fonctions de répartition	3
2.1 Définitions	3
2.2 Méthode pour démontrer qu'une v.a.r. est à densité	3
2.3 Propriétés des v.a.r. à densité en lien avec la fonction de répartition	4
2.4 Toutes les v.a.r. ne sont pas à densité	4
3 Les v.a.r. à densité : le point de vue des densités	6
3.1 Définition	6
3.2 Méthode pour déterminer une densité à partir de la fonction de répartition	6
3.3 Méthode pour déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité	7
3.4 Méthode pour démontrer qu'une fonction est une densité de probabilité	8
4 Transformation d'une v.a.r. à densité	11
4.1 Transformation affine (au programme)	11
4.2 Transformation polynomiale : élévation au carré (au programme)	12
4.3 Transformation exponentielle (au programme)	12
4.4 Une transformation usuelle (au programme et exo très classique)	12
4.5 Valeur absolue d'une v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)	13
4.6 Partie entière d'une v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)	13
4.7 Loi du min / max (au programme et exo classique)	13
4.8 Loi de la somme de deux v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)	14
5 Espérance d'une v.a.r. à densité	14
5.1 Définition	14
5.2 Propriétés de l'espérance	15
5.2.1 Espérance de la transformée affine d'une v.a.r. à densité	15
5.2.2 Linéarité de l'espérance	15
5.2.3 Espérance du produit de deux v.a.r. indépendantes	17
5.2.4 Croissance de l'espérance	17
6 Moments d'une v.a.r. à densité	17
6.1 Définition	17
6.2 Théorème de transfert	17
7 Variance d'une v.a.r. à densité	17
7.1 Définition	17
7.2 Détermination en pratique de la variance	18
7.3 Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes	18

1 Rappels sur les fonctions de répartition

1.1 Définition et propriétés

Definition 1. Soit X une v.a.r. . On appelle *fonction de répartition de X* et on note F_X l'application :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathbb{P}([X \leq x]) \end{cases}$$

Théoreme 1 (Propriétés des fonctions de répartition). *Soit X une v.a.r. . La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1.$
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}.$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}.$ Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)$
5. F_X admet une limite finie à gauche en tout point de $\mathbb{R}.$ Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}, F_X$ est continue en x si et seulement si $\mathbb{P}([X = x]) = 0$

Théoreme 2 (La fonction de répartition caractérise la loi). *Soient X et Y deux v.a.r. . Les v.a.r. X et Y suivent la même loi si et seulement si $F_X = F_Y.$*

Théoreme 3. *Soit X une v.a.r. . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b.$*

1. $\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$

1.2 Méthode pour démontrer qu'une fonction est une fonction de répartition

Théoreme 4 (Caractérisation des fonctions de répartition). *Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$ Il existe une v.a.r. X telle que F soit la fonction de répartition de X si et seulement si*

1. F est croissante.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3. F est continue à droite en tout point de \mathbb{R}

Exercice 1 : Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1. \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1. Tracer le graphe de $F.$
2. Montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. $X.$
3. Reconnaître la loi suivie par $X.$

Exercice 2 : Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Tracer le graphe de $F.$
2. Montrer que F n'est pas une fonction de répartition.

Corollaire 5 (Condition suffisante pour être une fonction de répartition). Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si

1. F est croissante.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
3. F est continue sur \mathbb{R}

alors, il existe une v.a.r. X telle que F soit la fonction de répartition de X .

Exercice 3 : Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Tracer le graphe de F .
2. Montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X .
3. Reconnaître la loi suivie par X .

2 Les v.a.r. à densité : le point de vue des fonctions de répartition

2.1 Définitions

Definition 2. Soit X une v.a.r. . On dit que la v.a.r. X est une v.a.r. à densité (on dira aussi que X admet une densité) si sa fonction de répartition F_X est :

1. continue sur \mathbb{R} ,
2. de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

Autrement dit, X est une v.a.r. à densité si il existe des nombres réels $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ tels que

1. F_X est continue sur \mathbb{R} (attention : même aux points x_i).
2. F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles $] -\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, \dots , $]x_{n-1}, x_n[$ et $]x_n, +\infty[$.

Exemple 1. La fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ étudiée dans l'exo 3 est la fonction de répartition d'une v.a.r. X .

De plus, F est :

- continue sur \mathbb{R}
- de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles ouverts $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points.

On peut en déduire que X est une v.a.r. à densité (et c'est bien heureux puisque il s'agit d'une loi usuelle : $X \leftrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$).

Definition 3. Donner la loi d'une v.a.r. à densité X , c'est donner :

1. $X(\Omega)$
2. sa fonction de répartition F_X

2.2 Méthode pour démontrer qu'une v.a.r. est à densité

Méthode. Pour montrer que X est à densité, on procède en trois étapes :

1. On calcule F_X , la fonction de répartition de X . L'expression de $F_X(x)$ va dépendre de plusieurs cas. Par exemple :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x < x_1 \\ F_2(x) & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ F_3(x) & \text{si } x > x_2 \end{cases}$$

2. On montre ensuite que F_X est de classe \mathcal{C}^1 (et donc a fortiori continue) sur les intervalles **ouverts** $] -\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$. La preuve se fait ainsi :

- F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, x_1[$ car $x \mapsto F_1(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, x_1[$
- F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $]x_1, x_2[$ car $x \mapsto F_2(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]x_1, x_2[$
- F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur $]x_2, +\infty[$ car $x \mapsto F_3(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]x_2, +\infty[$

3. Pour finir, on montre que F_X est continue aux points de recollements x_1 et x_2 . Précisément, on montre que

- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} F_X(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} F_1(x) = F_X(x_1)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x > x_1}} F_X(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x > x_1}} F_2(x) = F_X(x_1)$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x < x_2}} F_X(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x < x_2}} F_2(x) = F_X(x_2)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x > x_2}} F_X(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ x > x_2}} F_3(x) = F_X(x_2)$

Exercice 4 : Soit $a > 0$. Soient X et Y deux v.a.r. de fonctions de répartition respectives

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que X et Y sont deux v.a.r. à densité.

2.3 Propriétés des v.a.r. à densité en lien avec la fonction de répartition

Théoreme 6. Soit X une v.a.r. à densité. Alors sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbb{R} et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

Remarque 1. Cette propriété des v.a.r. à densité (qui les rend très différentes des v.a.r. discrètes) est étonnante et contre intuitive au premier abord. Elle semble impliquer que, pour toute partie A de \mathbb{R} , on a

$$\mathbb{P}([X \in A]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in A} [X = x]\right) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{x \in A} 0 = 0$$

et donc, en particulier pour $A = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}([X \in \mathbb{R}]) = 0$? Ce résultat est absurde puisque X est à valeurs réelles par définition donc $[X \in \mathbb{R}] = \Omega$. Où est l'erreur?

Le calcul précédent est faux lorsque A n'est pas dénombrable, par exemple lorsque A est un intervalle non réduit à un point. Ainsi, la propriété du théorème précédent n'empêche pas d'avoir des résultats comme $\mathbb{P}([1 \leq X \leq 2]) = \frac{1}{4}$ ou $\mathbb{P}([0 < X \leq 10]) = \frac{1}{2}$ par exemple.

On comprend alors que les v.a.r. à densité sont adaptées pour modéliser des phénomènes continus, tels que l'écoulement du temps. Typiquement, on pourra modéliser le temps d'attente d'un bus par une v.a.r. à densité.

Théoreme 7 (Calculer une probabilité à l'aide d'une fonction de répartition). Soit X une v.a.r. à densité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \end{aligned}$$

A retenir. Pour les v.a.r. à densité, les calculs de probabilité ne dépendent pas de la nature des inégalités. On peut donc changer une inégalité stricte en une inégalité large et vice-versa.

2.4 Toutes les v.a.r. ne sont pas à densité

Proposition 8. Les v.a.r. discrètes ne sont pas à densité.

Démonstration. Soit X une v.a.r. discrète. Alors il existe $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) > 0$. On en déduit que X n'est pas une v.a.r. à densité. \square

Exercice 5 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X .
2. Soit $h : x \mapsto \max(1, x)$. Dresser le tableau de variations de h puis déterminer $h([0, +\infty[)$.
3. Déterminer $Y(\Omega)$ et la fonction de répartition de Y .
4. Représenter graphiquement cette fonction de répartition.
5. Y est-elle une v.a.r. à densité? une v.a.r. discrète?

Démonstration.

1. D'après le cours : $X(\Omega) = [0, +\infty[$ et

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. On a $h : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. D'où le tableau de variations de h :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	0		+
Variations de h			

On en déduit que $h([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (h(X))(\Omega) \\ &= h(X(\Omega)) \\ &= h([0, +\infty[) \\ &= [1, +\infty[\end{aligned}$$

Déterminons la fonction de répartition de Y . Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$, alors $[Y \leq x] = \emptyset$ car $Y(\Omega) = [1, +\infty[$. On a alors :

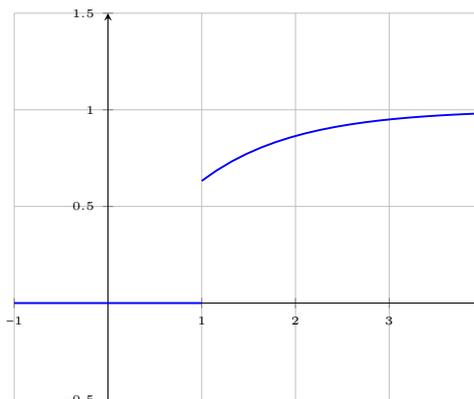
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- Si $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(1, X) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([1 \leq x] \cap [X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\Omega \cap [X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq x]) && (\text{car } x \geq 1) \\ &= F_X(x) \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Finalement, $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

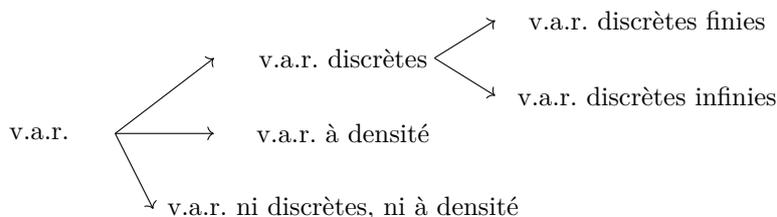
4. La fonction F_Y admet la représentation graphique suivante.



5. • F_Y n'est pas continue en 1, donc Y n'est pas une v.a.r. à densité.
 • $Y(\Omega) = [1, +\infty[$ n'est pas dénombrable, donc Y n'est pas une v.a.r. discrète.

□

On peut classifier les v.a.r. avec le diagramme suivant :



3 Les v.a.r. à densité : le point de vue des densités

3.1 Définition

Definition 4. Soit X une v.a.r. à densité. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une *densité de X* si :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
2. f coïncide avec F'_X sauf en un nombre fini de points.

Autrement dit, f est une densité de X si il existe des réels $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ tels que :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, f(x) = F'_X(x)$ (on a nécessairement $F'_X(x) \geq 0$ car F_X est croissante)
2. $\forall x \in \{x_1, \dots, x_n\}, f(x_i) \geq 0$

Remarque 2. Toute v.a.r. à densité possède une infinité de densités (on peut choisir la valeur positive que l'on souhaite en chacun des points x_i).

3.2 Méthode pour déterminer une densité à partir de la fonction de répartition

Méthode. On commence par donner une expression explicite de F_X (le plus souvent on doit distinguer plusieurs cas, F_X est définie « par morceaux »). A chaque morceau va correspondre un intervalle ouvert. On définit alors une densité de X en deux temps :

- Sur chaque intervalle ouvert où F_X est de classe \mathcal{C}^1 (et possède une unique expression explicite), on pose

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} F'_X(x)$$

- Aux points restants (aux bords des intervalles ouverts), on pose

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

Exercice 6 : On considère une v.a.r. à densité X , dont la fonction de répartition est

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer une densité de X .

Exercice 7 : On considère une v.a.r. à densité X , dont la fonction de répartition est

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de X .

3.3 Méthode pour déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité

Théorème 9 (Formule fondamentale). *Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f . Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Corollaire 10. *Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f . Soit I un intervalle. Si f est nulle en dehors de I et est strictement positive sur I , alors on peut considérer que $X(\Omega) = I$.*

Théorème 11. *Soient X et Y deux v.a.r. . Si X et Y admettent une même densité f , alors X et Y suivent la même loi.*

Démonstration. D'après la formule fondamentale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = F_Y(x)$$

Donc X et Y ont la même fonction de répartition et donc suivent la même loi car la fonction de répartition caractérise la loi. \square

A retenir. La loi d'une v.a.r. à densité est caractérisée par la donnée d'une densité.

Exercice 8 : On considère une v.a.r. à densité X , dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X .

Corollaire 12. *Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f . Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. La fonction F_X est de classe C^1 en tout point où f est continue. De plus, si f est continue en $x \in \mathbb{R}$, alors $F'(x) = f(x)$.

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

3. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbb{P}([X < a]) = \mathbb{P}([X \leq a]) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

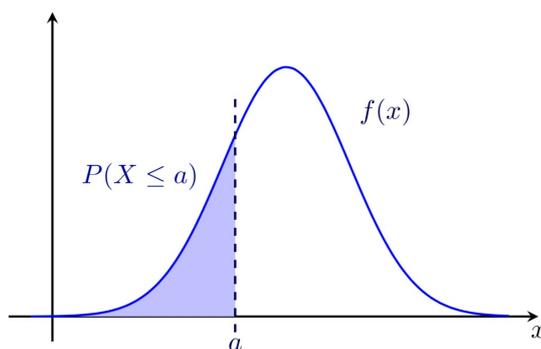
et

$$\mathbb{P}([X > b]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq b]) = 1 - F_X(b) = \int_b^{+\infty} f(t) dt$$

4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \leq b$, on a :

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Remarque 3. Ce théorème illustre l'intérêt des v.a.r. à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition F_X et donc la loi de X sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres).



Remarque 4. On retrouve alors le résultat $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. En effet,

$$\mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([x \leq X \leq x]) = F_X(x) - F_X(x) = \int_x^x f(t) dt = 0$$

Exercice 9 : On considère une v.a.r. à densité X , dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{si } x > e \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{P}([X \leq 2])$ puis $\mathbb{P}([\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}])$.

3.4 Méthode pour démontrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Definition 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une *densité de probabilité* si il existe une v.a.r. à densité X telle que f est une densité de X .

Théoreme 13 (Caractérisation des densités de probabilité). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est une densité de probabilité si et seulement si

1. f est continue sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut 1.

Exercice 10 : On définit une fonction f sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

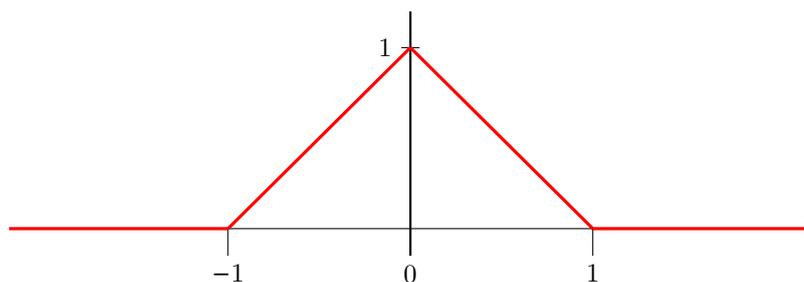
1. Tracer le graphe de f puis montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Expliciter F_X .
3. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leq \frac{1}{3}\right]\right)$.

Démonstration. 1. D'après le théorème précédent, il s'agit de démontrer que f vérifie trois propriétés.

- (a) La fonction f est continue sur $]-\infty, -1[$, sur $] -1, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
- (b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$. Par exemple, si $x \in [-1, 0[$, alors $0 \leq 1+x < 1$ et donc $f(x) \geq 0$ si $x \in [-1, 0[$.
- (c) Notons $U(y) = \int_y^0$ pour $y \leq -1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_y^0 f(t) dt &= \int_y^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= -\left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On démontre de même que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.



2. La densité de probabilité f étant définie par cas, il en est (a priori) de même pour F_X . Soit $x \in \mathbb{R}$. Quatre cas se présentent.

(a) Si $x < -1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

(b) Si $-1 \leq x < 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x (1+t) dt$

Or : $\int_{-1}^x (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^x = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right)$

et donc $F_X(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

(c) Si $0 \leq x < 1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt$

Or : $\int_0^x (1-t) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$ et $\int_{-1}^0 (1+t) dt = \frac{1}{2}$

et donc $F_X(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

(d) Si $x \geq 1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^x 0 dt$

et donc $F_X(x) = 1$.

3. Il y a deux manières de rédiger cette question :

(a) $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt + \int_1^{+\infty} 0 dt$

Or : $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} \right) = \frac{1}{8}$

(b) $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

car $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

On peut aussi utiliser l'une ou l'autre de ces rédactions pour la question suivante :

(a) $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leq \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{3}\right]\right) = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt$

par parité. Or : $\int_0^{\frac{1}{3}} (1-t) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$

(b) $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leq \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) - F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$ car $F_X\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{(\frac{1}{3})^2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{9}$

et $F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-\frac{1}{3})^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$

□

Exercice 11 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha e^{2x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité.

Démonstration. • Supposons que f soit une densité de probabilité, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^1 f(t) dt && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, 1] \\ &= \int_0^1 \alpha e^{2t} dt \\ &= \alpha \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 \\ &= \alpha \frac{e^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

D'où $\alpha = \frac{2}{e^2 - 1}$.

- Réciproquement, la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{e^2-1}e^{2x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ vérifie :

— f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

— $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

donc est bien une densité de probabilité.

□

4 Transformation d'une v.a.r. à densité

4.1 Transformation affine (au programme)

Théorème 14. Soit X une v.a.r. à densité. Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors la v.a.r. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

Remarque 5. Attention, il ne faut pas confondre **transformation affine** et **combinaison linéaire**.

Si X et Y sont des variables à densité, la v.a.r. $aX + bY$ est-elle à densité? La réponse est non.

On peut par exemple considérer :

- une v.a.r. X à densité,
- et la v.a.r. $Y = 1 - X$ (qui est une transformée affine de X , donc est à densité).

Alors $X + Y = 1$, ce qui montre que $(X + Y)(\Omega) = \{1\}$. Ainsi, $X + Y$ n'admet pas de densité puisque c'est une v.a.r. discrète (finie).

L'ensemble des v.a.r. à densité n'est donc pas stable par combinaison linéaire. De ce fait, ce n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 12 : Déterminer $h(I)$ dans les cas suivants :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $h : x \mapsto x + 1$ et $I = [0, 4]$ | 4. $h : x \mapsto -2x + 2$ et $I = [0, 1]$ | 7. $h : x \mapsto 2x + 3$ et $I = [1, +\infty[$ |
| 2. $h : x \mapsto 4x - 5$ et $I = \mathbb{R}$ | 5. $h : x \mapsto 3x$ et $I = [-1, 1]$ | 8. $h : x \mapsto -4x + 1$ et $I = [0, 1[$ |
| 3. $h : x \mapsto -x + 2$ et $I = [0, +\infty[$ | 6. $h : x \mapsto 2x + 3$ et $I = [0, +\infty[$ | 9. $h : x \mapsto 2x + 4$ et $I =] - 2, 2[$ |

Exercice 13 : Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On note $Y = 2X + 1$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .
2. La v.a.r. Y est-elle à densité? Si oui, en déduire une densité.
3. Reconnaître la loi de Y .

Exercice 14 : Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$. On note $Y = -3X + 2$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .
2. La v.a.r. Y est-elle à densité? Si oui, en déduire une densité.
3. Reconnaître la loi de Y .

Exercice 15 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
3. On pose $Y = 1 - 2X$. Déterminer la fonction de répartition de Y .
4. Montrer que Y est une v.a.r. à densité, puis déterminer une densité de Y .

4.2 Transformation polynomiale : élévation au carré (au programme)

Théoreme 15. Soit X une v.a.r. à densité. Alors la v.a.r. $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.

Exercice 16 : Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. Notons $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .
2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

4.3 Transformation exponentielle (au programme)

Théoreme 16. Soit X une v.a.r. à densité. Alors la v.a.r. $Y = e^X$ est une v.a.r. à densité.

Exercice 17 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On pose $Y = e^X$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Y .

4.4 Une transformation usuelle (au programme et exo très classique)

Exercice 18 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$?

Démonstration.

1. Notons $h : x \mapsto -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $X(\Omega) = [0, 1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (h(X))(\Omega) \\ &= h(X(\Omega)) \\ &= h([0, 1[) \\ &= \left[h(0), \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \right[\quad (\text{car } h \text{ est continue et strictement croissante sur } [0, 1[) \\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

2. Déterminons la fonction de répartition de Y . Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

(a) Si $x < 0$, alors $[Y \leq x] = \emptyset$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

(b) Si $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1 - X) \geq -\lambda x]) \quad (\text{car } -\lambda < 0) \\ &= \mathbb{P}([1 - X \geq e^{-\lambda x}]) \quad (\text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \\ &= \mathbb{P}([X \leq 1 - e^{-\lambda x}]) \\ &= F_X(1 - e^{-\lambda x}) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \quad (\text{car } 1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1[) \end{aligned}$$

Finalement :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .
Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

4.5 Valeur absolue d'une v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)

Exercice 19 : Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[-2, 2]$. La v.a.r. X admet pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de X puis donner sa fonction de répartition F_X .
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$. La variable aléatoire Y admet-elle une densité? Si oui, déterminer une densité de Y .
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Z = X + Y$. On pourra considérer le système complet d'événements $([X < 0], [X \geq 0])$. La v.a.r. Z admet-elle une densité? Si oui, déterminer une densité de Z .

4.6 Partie entière d'une v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)

Exercice 20 : (d'après EDHEC 2002)

Pour tout nombre réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière par défaut de x , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z}, [Y = k] = [k \leq X < k + 1]$.

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans \mathbb{N} .
 (b) Pour tout k de \mathbb{N}^* , calculer $\mathbb{P}([Y = k - 1])$.
 (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
 (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .
2. On pose $Z = X - Y$.
 (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
 (b) En utilisant le système complet d'événements $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}}$, montrer :

$$\forall x \in [0, 1[, \mathbb{P}([Z \leq x]) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

- (c) En déduire une densité f de Z .

4.7 Loi du min / max (au programme et exo classique)

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes, de densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X_1 .
3. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.
4. On pose $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Vérifier que Y et Z sont des variables aléatoires réelles à densité, puis déterminer une densité de Y et une densité de Z . Étudier l'existence des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$ de Y et Z , et les calculer lorsqu'elles existent.

4.8 Loi de la somme de deux v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)

Exercice 22 : (d'après HEC 2010)

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U + V$ est à densité à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U + V$.

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)f_U(x-t) dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.
2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.

5 Espérance d'une v.a.r. à densité

5.1 Définition

Definition 6. Soit X une v.a.r. de densité f .

1. On dit que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente.

2. Si c'est le cas, $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Remarque 6. Attention, il existe des v.a.r. à densité qui n'admettent pas d'espérance.

Théoreme 17. Soit X une v.a.r. de densité f . La v.a.r. X admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^0 t f(t) dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente, i.e. ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est convergente.

Méthode. On rédigera comme suit. « La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment. »

D'autre part, il est fréquent que la fonction f soit définie par cas et qu'elle soit nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ (avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$). On poursuivra alors la rédaction comme suit : « D'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_a^b t f(t) dt$$

car la fonction f est nulle en dehors de $[a, b]$. »

Exercice 23 : Soit X une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 24 : Soit X une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

5.2 Propriétés de l'espérance

5.2.1 Espérance de la transformée affine d'une v.a.r. à densité

Théorème 18. Soit X une v.a.r. à densité admettant une espérance. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$. Alors,

1. La v.a.r. $aX + b$ est une v.a.r. à densité.
2. La v.a.r. $aX + b$ admet une espérance. De plus : $\mathbb{E}(aX + b) = a \mathbb{E}(X) + b$.

5.2.2 Linéarité de l'espérance

Théorème 19. Soient X et Y deux v.a.r. à densité admettant chacune une espérance. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors la v.a.r. $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$$

Généralisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient X_1, \dots, X_n des v.a.r. à densité. On suppose que les v.a.r. X_1, \dots, X_n admettent chacune une espérance. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors la v.a.r. $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}(X_i)$$

Remarque 7. Ces deux théorèmes nous fournissent des arguments permettant de démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance. On pourra rédiger comme suit :

1. la v.a.r. Z admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
2. la v.a.r. Z admet une espérance en tant que somme / combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.

Exercice 25 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On note Y la v.a.r. définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y puis tracer son graphe. La v.a.r. Y est-elle une v.a.r. à densité ?
2. Justifier que $Y = \frac{X + |X|}{2}$.
3. Déterminer la loi de $Z = |X|$.
4. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

1. Par définition de la v.a.r. Y , $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[\cap X(\Omega) = [0, 1]$. Déterminons la fonction de répartition de Y . Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

(a) Si $x < 0$, alors $[Y \leq x] = \emptyset$ car $Y(\Omega) \subset [0, 1]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

(b) Si $x \in [0, 1]$. La famille $([X \leq 0], [X > 0])$ forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([Y \leq x] \cap [X \leq 0]) + \mathbb{P}([Y \leq x] \cap [X > 0]) \\ &= \mathbb{P}([0 \leq x] \cap [X \leq 0]) + \mathbb{P}([X \leq x] \cap [X > 0]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq 0]) + \mathbb{P}([0 < X \leq x]) \end{aligned}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$, on a :

$$\mathbb{P}([X \leq 0]) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} [t]_{-1}^0 = \frac{1}{2}$$

De plus, comme $x \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}([0 < X \leq x]) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} [t]_0^x = \frac{x}{2}$$

(c) Si $x > 1$, alors $[Y \leq x] = \Omega$ car $Y(\Omega) \subset [0, 1]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction F_Y admet la représentation graphique suivante.

La fonction F_Y n'est pas continue en 0. Ainsi Y n'est pas une v.a.r. à densité.

La fonction F_Y n'est pas constante par morceaux, donc Y n'est pas une v.a.r. discrète.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

(a) Si $X(\omega) \leq 0$, alors :

$$(X + |X|)(\omega) = X(\omega) + (|X|)(\omega) = X(\omega) + (-X)(\omega) = 0 = Y(\omega)$$

(b) Si $X(\omega) > 0$, alors :

$$\left(\frac{X + |X|}{2}\right)(\omega) = \frac{X(\omega) + (|X|)(\omega)}{2} = \frac{X(\omega) + X(\omega)}{2} = \frac{2X(\omega)}{2} = X(\omega) = Y(\omega)$$

Finalement, on a bien : $\frac{X + |X|}{2} = Y$.

3. (a) Notons $h : x \mapsto |x|$, de sorte que $Z = h(X)$. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$, alors $X(\Omega) = [-1, 1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= (h(X))(\Omega) \\ &= h(X(\Omega)) \\ &= h([-1, 1]) \\ &= [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{par définition de } h)$$

(b) Déterminons la fonction de répartition de Z . Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

i. Si $x < 0$, alors $[Z \leq x] = \emptyset$ car $Z(\Omega) = [0, 1]$. Donc on a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

ii. Si $x > 1$, alors $[Z \leq x] = \Omega$ car $Z(\Omega) = [0, 1]$. Donc on a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leq x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

iii. Si $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leq x]) = \mathbb{P}([|X| \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leq X \leq x]) \\ &= \int_{-x}^x f_X(t) dt = \int_{-x}^x \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} [t]_{-x}^x = x \end{aligned}$$

On reconnaît une loi usuelle : $|X| \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

4. La v.a.r. Y admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X + |X|}{2}\right) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(|X|)) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

□

5.2.3 Espérance du produit de deux v.a.r. indépendantes

Théorème 20. Soient X et Y deux v.a.r. à densité. On suppose que

1. X et Y admettent une espérance.
2. X et Y sont indépendantes.

Alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarque 8. Il est possible que XY ne soit pas une v.a.r. à densité. Dans ce cas, on ne sait pas comment est défini $\mathbb{E}(XY)$, mais qu'importe, on sait calculer cette espérance dans ce cas.

5.2.4 Croissance de l'espérance

Théorème 21. Soient X et Y deux v.a.r. à densité. On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

$$\mathbb{P}([X \leq Y]) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

En particulier, si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

6 Moments d'une v.a.r. à densité

6.1 Définition

Definition 7 (Moments d'ordre r). Soit X une v.a.r. de densité f et soit $r \in \mathbb{N}$.

1. On dit que X admet un moment d'ordre r , noté $m_r(X)$, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$ est absolument convergente (ce qui revient à démontrer la convergence pour ces calculs de moment).

2. Sous réserve d'existence, on a :
$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$

6.2 Théorème de transfert

Théorème 22. Soit X une v.a.r. admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$). On considère une fonction $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t)f(t) dt$ converge absolument et, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t)f(t) dt$$

Remarque 9. Ici, encore une fois, on ne sait pas si $g(X)$ est encore une v.a.r. à densité. On s'en fiche, sous ces hypothèses on peut calculer son espérance sans savoir la définir.

Corollaire 23. Soit X une v.a.r. de densité f et soit $r \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'existence,
$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$$

7 Variance d'une v.a.r. à densité

7.1 Définition

Definition 8. Soit X une v.a.r. à densité.

1. Si la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que X admet une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et

$$\mathbb{V}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

2. Sous ces hypothèses on appelle *écart-type* et on note $\sigma(X)$ le réel $\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

7.2 Détermination en pratique de la variance

Théoreme 24 (Formule de Kœnig-Huygens). *Soit X une v.a.r. à densité. La v.a.r. X admet une variance ssi la v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 et si c'est le cas :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Exercice 26 : Soit X une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

La v.a.r. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 27 : On considère une v.a.r. à densité X , dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La v.a.r. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

7.3 Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

Théoreme 25. *Soient X et Y deux v.a.r. à densité. On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 (i.e. X et Y admettent une variance). Alors la v.a.r. $X + Y$ admet une variance. De plus :*

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Généralisation : soient X_1, \dots, X_n des v.a.r. à densité mutuellement indépendantes et qui admettent chacune un moment d'ordre 2. Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

7.4 Variables centrées / réduites

Definition 9. Soit X une v.a.r. à densité.

1. Si X admet une espérance égale à 0 on dit que X est une variable centrée.
2. Si X admet une variance égale à 1 on dit que X est une variable réduite.

3. Si X admet une variance non nulle, la variable $X^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X .