Table des matières

1 Loi uniforme sur un intervalle réel

1.1 Densité

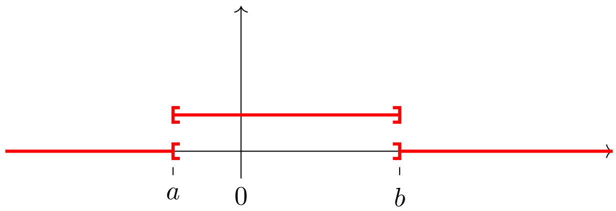
Definition 1. Soit X une v.a.r. à densité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On dit que X suit la *loi uniforme* sur $[a, b]$ si :

1. $X(\Omega) = [a, b]$.
2. X admet pour densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Représentation graphique de la densité f.



Remarque 1. Puisque on peut changer la valeur d'une densité en un point sans changer la loi, on en déduit que les lois uniformes sur $[a, b]$, sur $]a, b[$, sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$ sont les mêmes. Il peut être intéressant d'exclure une borne pour faire une transformation de X sans avoir de problème de définition. Par exemple, pour définir $Y = \ln(X)$, on supposera que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1])$.

Démonstration. La fonction f est bien une densité.

1. f est continue sur $]-\infty, a[$, sur $]a, b[$ et sur $]b, +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
3. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [a, b] \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b-a}{b-a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

1.2 Fonction de répartition

Théoreme 1. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ $(a < b)$. Alors sa fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in]b, +\infty[\end{cases}$$

Démonstration. On sait que la densité de X est nulle en dehors de $[a, b]$ donc

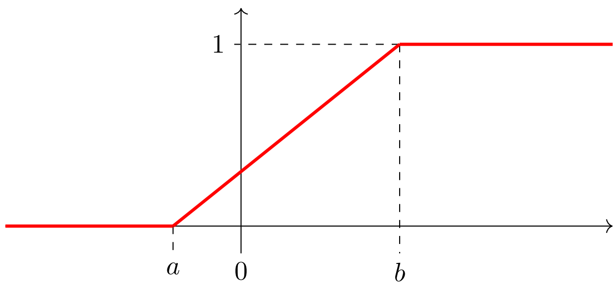
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Soit $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{a} 0\ \mathrm{d}t + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

□

Représentation graphique de la fonction de répartition F_X.



1.3 Espérance et variance

Théoreme 2. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ $(a < b)$. Alors, on a :*

1. *X admet une espérance et* $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}}$.
2. *X admet une variance et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$.

Démonstration. La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment. Or :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{a}^{b} t\,f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [a, b] \\ &= \int_{a}^{b} \frac{t}{b-a}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{b-a}$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b \\
&= \frac{1}{2} \frac{b^2-a^2}{b-a} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

La v.a.r. X admet une variance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) \ \mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment. Or :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) \ \mathrm{d}t &= \int_a^b t^2 f(t) \ \mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [a,b] \\
&= \int_a^b \frac{t^2}{b-a} \ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{b-a}$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) \ \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, X admet une variance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b t^2 \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^3}{3} \right]_a^b \\
&= \frac{1}{3} \frac{b^3-a^3}{b-a} \\
&= \frac{1}{3} \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{b-a} \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3}
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huyghens, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{1}{12}\left(4\left(a^2+ab+b^2\right) - 3\left(a^2+2ab+b^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) \\
&= \frac{1}{12}(b-a)^2
\end{aligned}$$

□

1.4 Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme

Théoreme 3. *Soit X une v.a.r. à densité. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \iff Y = (b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$$

Exercice 27 : À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ?

2 Loi exponentielle

2.1 Densité

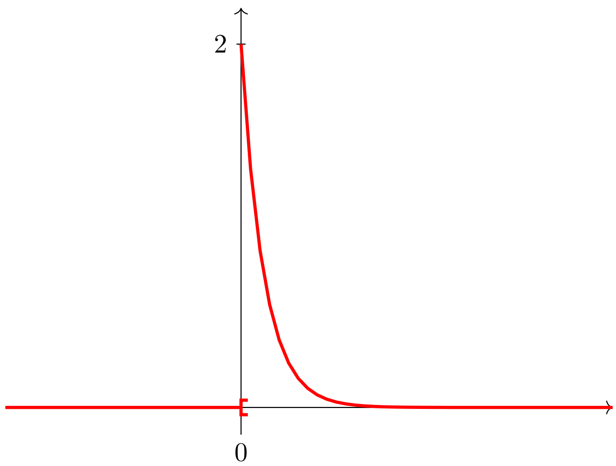
Definition 2. Soit X une v.a.r. à densité. Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit *la loi exponentielle de paramètre* λ si :

1. $X(\Omega) = [0, +\infty[$
2. X admet pour densité la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Représentation graphique de la densité f pour $\lambda = 2$.



Démonstration. On vérifie aisément que f est bien une densité de probabilité :

1. f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
3. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t &= \int_{0}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\\ &= \int_{0}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_{0}^{B} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_{0}^{B} \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda B} + 1 \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 && \text{car } \lambda > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t = 1$.

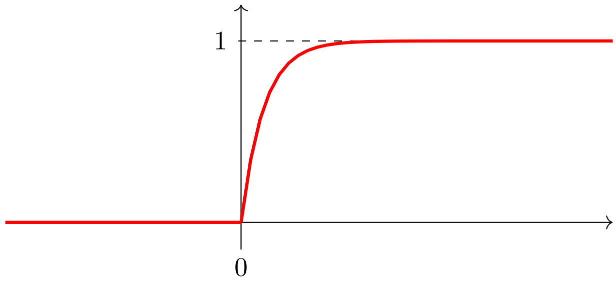
$\square$

2.2 Fonction de répartition

Théoreme 4. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$). Alors sa fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de la fonction de répartition F_X.



Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ et donc $F_X(x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\\ &= \int_{0}^{x} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} && \text{d'après les calculs faits pour la densité} \end{aligned}$$

□

2.3 Espérance et variance

Théoreme 5. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$). Alors, on a :*

1. *X admet une espérance et* $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}}$.
2. *X admet une variance et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}}$.

Démonstration. La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment. Or :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\\ &= \int_{0}^{+\infty} \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \in [0, +\infty[$. On effectue une intégration par parties :

$$\left| \begin{array}{lclclcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \quad & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^B t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt &= \Big[-t\,e^{-\lambda t}\Big]_0^B + \int_0^B e^{-\lambda t}\,dt \\ &= -B\,e^{-\lambda B} + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^B \\ &= -B\,e^{-\lambda B} - \frac{e^{-\lambda B}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda} \qquad \text{par croissances comparées, car } \lambda > 0\end{aligned}$$

Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment. Or :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt \qquad \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\\ &= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \lambda t^2 e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \in [0, +\infty[$. On effectue une intégration par parties :

$$\left|\begin{array}{lllllll} u(t) & = & t^2 & \quad & u'(t) & = & 2t \\ v'(t) & = & \lambda e^{-\lambda t} & & v(t) & = & -e^{-\lambda t}\end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^B t^2\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt &= \Big[-t^2\,e^{-\lambda t}\Big]_0^B + 2\int_0^B t\,e^{-\lambda t}\,dt \\ &= -B^2\,e^{-\lambda B} + \frac{2}{\lambda}\int_0^B t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

car $-B^2\,e^{-\lambda B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\int_0^B t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ d'après ce qui précède.

Donc X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huyghens, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

□

2.4 La seule loi à densité à perte de mémoire

Théoreme 6. *Soit X une v.a.r. à densité. X suit une loi exponentielle si et seulement si :*

1. $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{R}_+}$
2. $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\boxed{\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \mathbb{P}([X > t])}$ *(on dit que la loi exponentielle est sans mémoire)*
3. $\forall s \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{\mathbb{P}([X > s]) \neq 0}$

2.5 Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi exponentielle

Théoreme 7. *Soit* $\lambda > 0$.

- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff Y = \dfrac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$
- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff Y = \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

Démonstration. En exo. □

Exercice 28 : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et soit $\lambda > 0$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de M_n et reconnaître sa loi.

2.6 Calcul d'intégrales à l'aide de la loi exponentielle

Méthode (Calculer une intégrale en reconnaissant un moment d'une loi exponentielle).

Soit $\lambda > 0$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1$.
  En effet, on reconnaît le moment d'ordre 0 d'une v.a.r. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$.
  En effet, on reconnaît le moment d'ordre 1 d'une v.a.r. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda^2}$.
  En effet, on reconnaît le moment d'ordre 2 d'une v.a.r. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

Exercice 29 : Calculer les intégrales impropres suivantes en utilisant la « méthode des moments ».

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{-2t}\, dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-5t}\, dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{3}}\, dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt \ (a > 0)$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2te^{-2t}\, dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-5t}\, dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{3}}\, dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-at}\, dt \ (a > 0)$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t^2e^{-2t}\, dt$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-5t}\, dt$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t}{3}}\, dt$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-at}\, dt \ (a > 0)$

3 Loi normale centrée réduite

3.1 Une intégrale remarquable

Proposition 8.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}}$$

Démonstration. On ne peut pas calculer cette intégrale, mais on peut montrer qu'elle converge. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

- $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire donc il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge
- pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$
- $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente $(2 > 1)$

Par critère de négligeabilité pour les intégrales généralisées de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge. □

3.2 Densité

Definition 3. Soit X une v.a.r. à densité. On dit que X suit *la loi normale centrée réduite* si :

1. $X(\Omega) =]-\infty, +\infty[$
2. X admet pour densité la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ pour signifier que X suit la loi normale centrée réduite.

3.3 Espérance et variance

Théoreme 9. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors,*

1. *X admet une espérance et* $\boxed{\mathbb{E}(X) = 0}$
2. *X admet une variance et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = 1}$

3.4 Fonction de répartition

3.4.1 Définition

La fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite n'admet pas d'expression « simple ». On la note habituellement Φ.

$$\boxed{\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.}$$

3.4.2 Propriétés remarquables de Φ

Théoreme 10. *Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

1. *La fonction Φ réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]0,1[$.*
2. $\boxed{\Phi(0) = \mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \frac{1}{2}}$
3. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$
4. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = 2\,\Phi(x) - 1}$

Démonstration.

1. La densité φ étant continue sur $\mathbb{R}$, il vient que la fonction de répartition Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$. Ainsi, Φ est
   - continue sur $\mathbb{R}$
   - strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   donc Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\Phi(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x)[=]0,1[$.
2. $\Phi(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ car φ est paire. Donc $\Phi(0) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par changement de variable affine :

$$\left|\begin{array}{lcl} t = -u & & u = -t \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u & & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \\ t = x & \Longleftrightarrow & u = -x \\ t = -\infty & \Longleftrightarrow & u = +\infty \end{array}\right.$$

   On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t &= \int_{+\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(-u)^2}{2}}(-\mathrm{d}u) \\
&= \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \int_{x}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \qquad \text{par Chasles} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
&= 1 - \Phi(x)
\end{aligned}$$

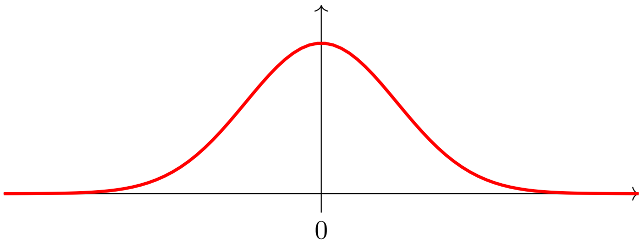
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([|X| \leqslant x]) &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\
&= \Phi(x) - \Phi(-x) \\
&= \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) \\
&= 2\Phi(x) - 1
\end{aligned}$$

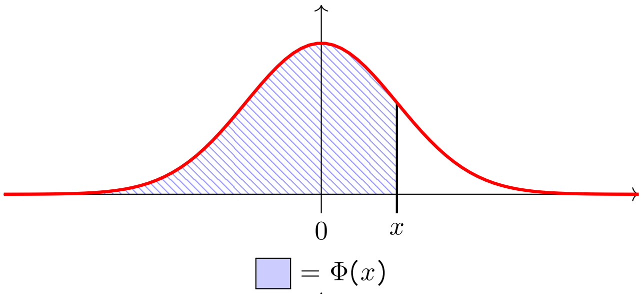
□

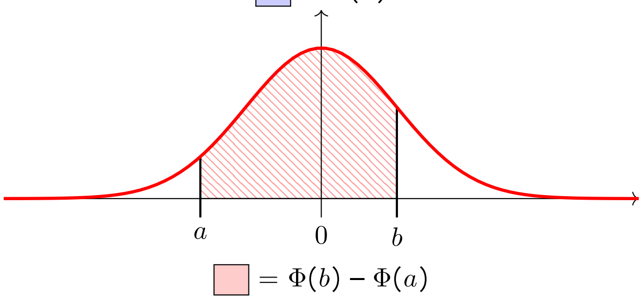
3.5 Représentations graphiques

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Représentation graphique de la densité φ.

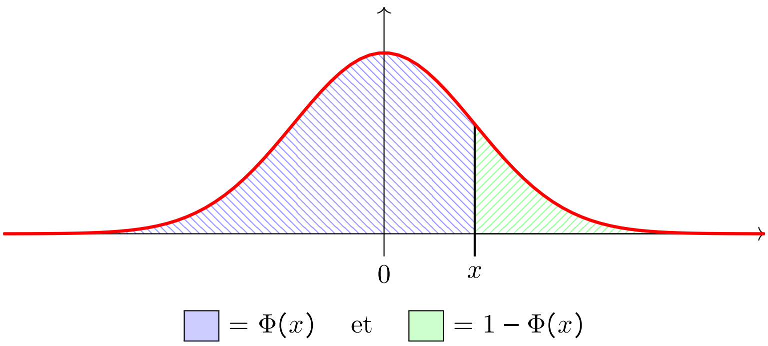


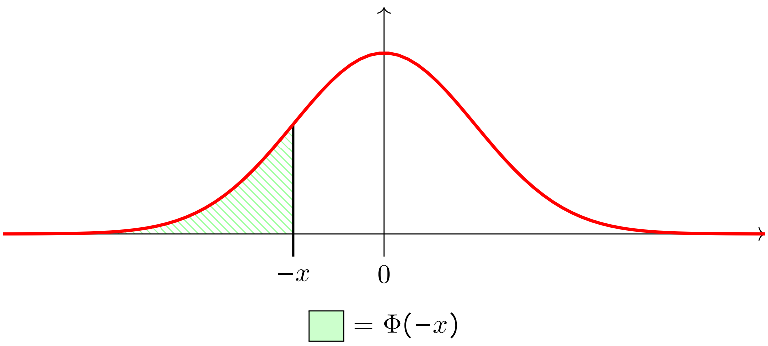
Représentation graphique de la fonction de répartition Φ. Φ n'admet pas d'expression « simple ». On représente donc graphiquement $\Phi(x)$ comme l'aire sous la courbe de φ entre $-\infty$ et x.





Les résultats issus de la parité de φ peuvent se lire graphiquement.





4 Loi normale (ou de Laplace-Gauss)

4.1 Densité

Definition 4. Soit X une v.a.r. à densité. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit que X suit *la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) de paramètres* (m, σ^2) si :

1. $X(\Omega) =]-\infty, +\infty[$
2. X admet pour densité la fonction $\varphi_{m,\sigma^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ pour signifier que X suit la loi normale de paramètre (m, σ^2).

4.2 Espérance et variance

Théoreme 11. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Alors, on a :*

1. *X admet une espérance et* $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$
2. *X admet une variance et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \sigma^2}$

Remarque 2. Les paramètres de la loi normale sont donc respectivement l'espérance et la variance.

Méthode (Pour trouver les paramètres d'une loi normale). Si on sait que X suit une loi normale, alors il suffit de calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ pour trouver les paramètres de la loi de X.

4.3 Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale

Théoreme 12. *Soit X une v.a.r. à densité et soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Si X suit une loi normale, alors toute transformée affine de X suit une loi normale.*

Plus précisément : si $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \iff aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \iff \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)}$$

Remarque 3. On reconnaît la variable centrée réduite associée à X :

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Démonstration. Partant de X v.a.r. tel que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, la v.a.r. $Y = aX + b$ suit une loi normale. Ses paramètres s'obtiennent en calculant :

$$\begin{array}{lllll} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}(aX + b) & = a\,\mathbb{E}(X) + b & = a\,m + b \\ \mathbb{V}(Y) & = & \mathbb{V}(aX + b) & = a^2\,\mathbb{V}(X) & = a^2\,\sigma^2 \end{array}$$

d'où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$. □

Exercice 30 : On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 16)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}([Y < 7])$ et $\mathbb{P}([Y \leqslant 12,12])$.
2. (a) Déterminer le seuil x tel que : $\mathbb{P}([Y \leqslant x]) = 0,9162$.
   (b) Déterminer le seuil y tel que $\mathbb{P}([Y > y]) = 0,9418$.

Démonstration.
Tout d'abord $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(7,16)$. Ainsi $Y^* = \dfrac{Y-7}{4} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. *(attention : $\sigma^2 = 16$ donc $\sigma = 4$)* On note Φ la fonction de répartition de Y^*.

1. D'après la table de la loi normale centrée réduite, on a :

(a) $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y<7]) &= \mathbb{P}([Y-7<7-7]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{Y-7}{4} < \frac{0}{4}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([Y^*<0]) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y \leqslant 12,12]) &= \mathbb{P}\left(\left[Y^* \leq \frac{12,12-7}{4}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[Y^* \leq \frac{5,12}{4}\right]\right) \\ &= \Phi(1,28) = 0,8997 \end{aligned}$$

2. (a) Remarquons tout d'abord que :

$$\mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[Y^* \leqslant \frac{x-7}{4}\right]\right) = \Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) = 0,9162$$

Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve $\Phi(1,38) = 0,9162$. On a alors :

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) = \Phi(1,38) &\iff \frac{x-7}{4} = 1,38 \qquad \text{(car } \Phi \text{ est bijective sur } \mathbb{R}) \\ &\iff x = 4 \times 1,38 + 7 = 12,52 \end{aligned}$$

Ainsi, $12,52$ est donc le seuil recherché.

(b) $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y>y]) &= \mathbb{P}\left(\left[Y^* > \frac{y-7}{4}\right]\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{y-7}{4}\right) = \Phi\left(-\frac{y-7}{4}\right) = \Phi\left(\frac{7-y}{4}\right) \end{aligned}$$

d'après les propriétés de la fonction Φ.
Nous cherchons donc y tel que $\Phi\left(\dfrac{7-y}{4}\right) = 0,9418$.
Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve $\Phi(1,57) = 0,9418$.

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{7-y}{4}\right) = \Phi(1,57) &\iff \frac{7-y}{4} = 1,57 \qquad \text{(car } \Phi \text{ est bijective sur } \mathbb{R}) \\ &\iff y = 7 - 4 \times 1,57 = 0,72 \end{aligned}$$

Ainsi, $0,72$ est donc le seuil recherché.

□

A retenir. Lorsque X suit une loi normale générale, on se ramène toujours à la loi normale centrée réduite via une transformation affine pour effectuer les calculs.

4.4 Stabilité par somme des lois normales

Théoreme 13. *Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$. Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes. Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.*

Généralisation : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_i, \sigma_i^2\right)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + \ldots + m_n, \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2\right)$.

4.5 Représentations graphiques

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Une densité d'une telle loi est représentée par une courbe en cloche.

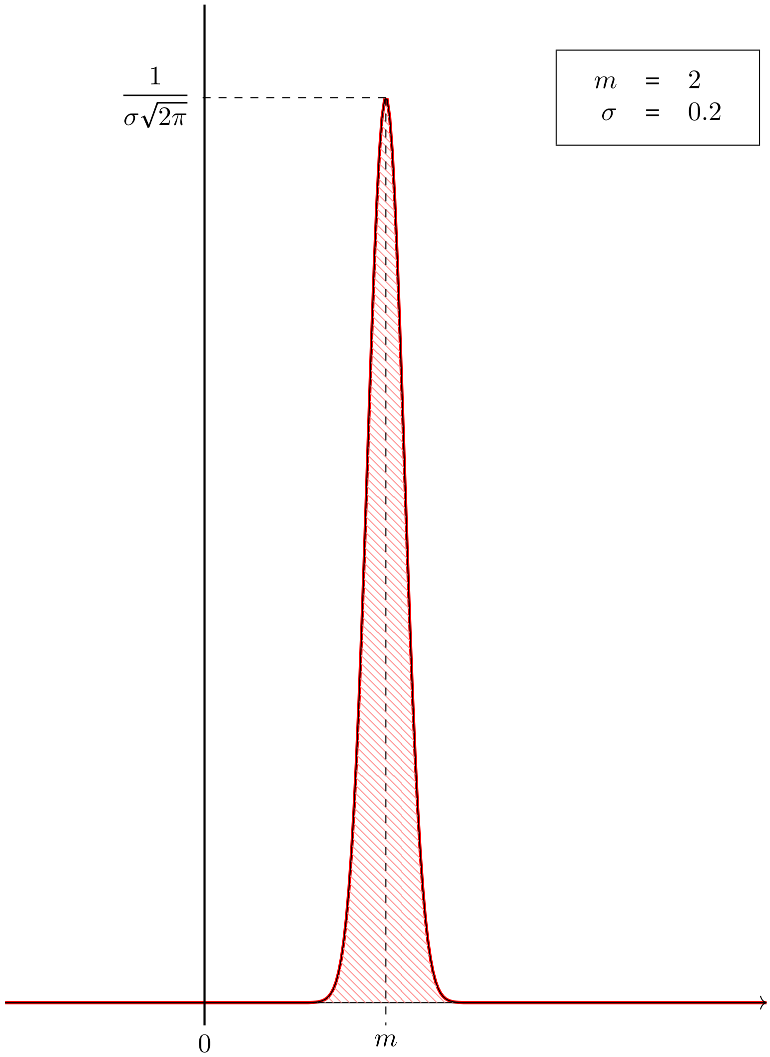
1. Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, cette cloche est centrée en 0.
2. Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, cette cloche est centrée en m.

D'autre part, la forme de cette cloche (hauteur et largeur) dépend de σ :

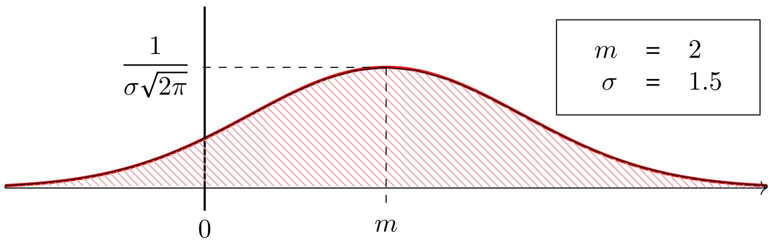
1. plus σ est petit, plus le pic est haut et fin;
2. plus σ est grand, plus le pic est bas et large.

Notez que l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et $+\infty$ est invariante (on a toujours $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,\sigma}(t)\ \mathrm{d}t = 1$).

1. Représentation graphique de la densité φ_{m,σ^2} de la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.



2. Représentation graphique d'une densité φ_{m,σ^2} de la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.



3. Représentation graphique de la densité φ_{m,σ^2} de la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.