1 Une matrice possédant une unique valeur propre

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On compile le code **Python** suivant :

```
M = np.array([[4,-3,1],[1,1,0],[0,1,1]])
print(al.matrix_power(M-2*np.eye(3),3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

Traduire ce résultat en une égalité matricielle.

Démonstration. Le code **Python** permet d'afficher la matrice $(M-2I)^3$. Ainsi, $\boxed{(M-2I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$. □

2. Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$.

Démonstration. D'après la question précédente, $P(X) = (X-2)^3$ est un polynôme annulateur de M. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } P(X)\} = \{2\}$$

Ainsi : 2 est l'unique valeur propre possible de M.
De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M-2I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) && L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2 < 3 \end{aligned}$$

donc $M-2I$ n'est pas inversible et 2 est bien une valeur propre de M. On peut conclure que $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{2\}}$. □

3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration. Supposons que M soit diagonalisable. Alors il existe :
- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible
- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M

telles que $M = PDP^{-1}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} M &= P(2I)P^{-1} \\ &= 2PIP^{-1} \\ &= 2PP^{-1} \\ &= 2I \end{aligned}$$

Or $M \neq 2I$, c'est donc absurde. On peut conclure que $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$. □

2 Deux matrices possédant deux valeurs propres distinctes

2.1 Le cas diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension de $E_1(A)$.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x + y & = 0 \\ x - y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_1(A)$
- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A) \text{ et } \dim(E_1(A)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) = 2}$. □

2. Déterminer une base et la dimension de $E_{-1}(A)$.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x+y & = 0 \\ x+y & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = -y \\ z & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \quad \text{et} \quad z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_{-1}(A)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A) \text{ et } \dim(E_{-1}(A)) = \operatorname{Card}(\mathcal{F}_{-1}) = 1}$. □

3. En déduire $\operatorname{Sp}(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.

- Montrons que $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 1\}$. On a montré à la question précédente que $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp}(A)$, il reste à montrer l'inclusion réciproque.
  Notons
  $$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  D'après ce qui précède, (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$ et (U_3) est une base de $E_{-1}(A)$. Supposons que A possède une autre valeur propre λ ($\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$). Notons U_4 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On a en particulier $U_4 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Par théorème de concaténation, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre. On a donc construit une famille libre de cardinal 4 dans un espace vectoriel ($\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) de dimension 3. C'est absurde.
  On en déduit que A ne possède pas d'autres valeurs propres que -1 et 1. Autrement dit, $\operatorname{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.
  D'où $\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 1\}}$.

- 0 n'est pas valeur propre de A, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

□

4. Démontrer l'existence :
   - d'une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la 2e ligne est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - d'une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale

   telles que $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

   Démonstration. Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre. De plus,

   $$\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

   Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
   La matrice A est donc diagonalisable et il existe
   - une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de A
   - une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

   telles que $A = PDP^{-1}$.
   On peut choisir par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$. □

2.2 Le cas non diagonalisable

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $(B - I)(B - 2I)$ puis $(B - I)(B - 2I)^2$ en minimisant le nombre de produits calculés.

   Démonstration. On a

   $$(B - I)(B - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   puis

   $$(B - I)(B - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   □

   (b) En déduire que B est inversible et donner une expression de B^{-1} en fonction de B et I.

   Démonstration. D'après la question précédente : $(B - I)(B - 2I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
   Or,

   $$\begin{aligned} (B - I)(B - 2I)^2 &= (B - I)(B^2 - 4B + 4I) \\ &= B^3 - 5B^2 + 8B - 4I \end{aligned}$$

   Donc $B\left(\frac{1}{4}\left(B^2 - 5B + 8I\right)\right) = I$. Ceci signifie exactement que B est inversible et $\boxed{B^{-1} = \frac{1}{4}\left(B^2 - 5B + 8I\right)}$.
   □

2. (a) Donner un polynôme annulateur de B et lister les valeurs propres possibles de B.

Démonstration. D'après la question 1a, le polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de B. On en déduit que les valeurs propres possibles de B sont : 1 et 2. $\square$

(b) Déterminer $\mathrm{Sp}(B)$.

Démonstration. D'une part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B-I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) && L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2 < 3
\end{aligned}$$

donc $B - I$ n'est pas inversible et 1 est valeur propre de B.
D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B-2I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) && L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\
&= 2 < 3
\end{aligned}$$

donc $B - 2I$ n'est pas inversible et 2 est valeur propre de B.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2\}}$. $\square$

3. (a) Calculer la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de B. On ne demande pas d'en déterminer une base.

Démonstration. D'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(E_1(B)) + \mathrm{rg}(B-I)$$

d'où $\boxed{\dim(E_1(B)) = 3 - 2 = 1}$.
De même,

$$3 = \dim(E_2(B)) + \mathrm{rg}(B-2I)$$

d'où $\boxed{\dim(E_2(B)) = 3 - 2 = 1}$. $\square$

(b) La matrice B est-elle diagonalisable ?

Démonstration. On sait que $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2\}$ et $\dim(E_1(B)) = \dim(E_2(B)) = 1$.
Supposons que B soit diagonalisable. Alors il existe une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B. Par principe des tiroirs, deux de ces vecteurs se trouvent dans le même sous-espace propre ($E_1(B)$ ou $E_2(B)$). On a donc une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est absurde.
Donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$ $\square$

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Démonstration. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Ainsi

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

5. On pose $T = P^{-1}BP$. Calculer T.

Démonstration. On a

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PT^nP^{-1}$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = PT^nP^{-1}$ »
Initialisation :
D'une part, $B^0 = I$. D'autre part, $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^nB \\ &= PT^nP{-}1PTP^{-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= PT^nTP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré, par principe de récurrence, que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B^n = PT^nP{-}1.}$ □

7. On pose $T = D + N$, où D est une matrice diagonale et où N est une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Expliciter D et N.

Démonstration. On a nécessairement :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Exprimer T^n comme une combinaison linéaire de D^n et ND^{n-1} puis sous forme de tableau matriciel explicite en fonction de n.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a
$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$
donc les matrices D et N commutent.
- On a $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ donc, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^{k-2}N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
- D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \textit{(car } n \geqslant 1\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \textit{(car pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\ &= \boxed{D^n + nND^{n-1}} \end{aligned}$$

La formule précédente reste valable pour $n = 0$. En effet :

- D'une part : $T^0 = I$.
- D'autre part, la matrice D est inversible donc D^{-1} existe et $D^0 + 0ND^{-1} = I$.

De manière explicite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

(b) En déduire B^n sous forme de tableau matriciel explicite en fonction de n.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait d'après la question 6 que

$$B^n = PT^nP^{-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2^n & -2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & -1+(n+1)2^n \\ -1+2^n & 2-2^n & -1+(n+2)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3 Une matrice possédant trois valeurs propres distinctes

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice C est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de C.

   Démonstration. Les deux premières colonnes de la matrice C sont identiques, donc $\boxed{C \text{ n'est pas inversible}}$. On en déduit que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } C}$. □

2. On compile le code **Python** suivant :

```
C = np.array([[1,1,1],[0,0,-1],[-2,-2,-1]])
a = al.matrix_rank(C-np.eye(3))
b = al.matrix_rank(C+np.eye(3))
print('a =',a)
print('b =',b)
```

   et on obtient l'affichage :

   a = 2
   b = 2

   En déduire deux autres valeurs propres de C.

   Démonstration. D'après l'affichage **Python**,
   - $\text{rg}(C - I) = 2 < 3$ donc $C - I$ n'est pas inversible donc 1 est valeur propre de C.
   - $\text{rg}(C + I) = 2 < 3$ donc $C + I$ n'est pas inversible donc -1 est valeur propre de C.

   □

3. Donner $\text{Sp}(C)$. La matrice C est-elle diagonalisable ?

   Démonstration. On a vu que -1, 0 et 1 sont des valeurs propres de C. Or, $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc C possède au maximum 3 valeurs propres distinctes. On en déduit qu'on a trouvé toutes les valeurs propres de C : $\boxed{\text{Sp}(C) = \{-1, 0, 1\}}$. La matrice C possède 3 valeurs propres distinctes et $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\boxed{C \text{ est diagonalisable}}$. □

4. Expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que $C = PDP^{-1}$.

Démonstration. • La matrice C est diagonalisable donc il existe

— une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de C

— une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale donc les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de C

telles que $C = PDP^{-1}$.

• Déterminons des bases des sous-espaces propres de C. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(C) &\iff (C+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = -z \\ y = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -2z & L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ y = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \quad \text{et} \quad y = z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_{-1}(C)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(C)}$.

$$\begin{aligned}
U \in E_0(C) &\iff CU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0\\ \qquad\quad - z = 0\\ -2x - 2y - z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0\\ \qquad - z = 0\\ \qquad\quad z = 0 \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x + y \quad = 0\\ \qquad\quad z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x \quad = -y\\ \quad z = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_0(C) &= \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \quad \text{et} \quad z = 0\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} -y\\ y\\ 0\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$:

— engendre $E_0(C)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_0 \text{ est une base de } E_0(C)}$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(C) &\iff (C - I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} \qquad\quad y + z = 0\\ \qquad - y - z = 0\\ -2x - 2y - 2z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0\\ \qquad y + z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x \quad = 0\\ \quad y = -z\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_1(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \quad \text{et} \quad y = -z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_1(C)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(C)}$.

- On pose alors $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a bien $C = PDP^{-1}$.

□