DS4 (vA)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.

2. Calculer u_0 et u_1.

3. ***a)*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(2)$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(2)$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

c) Donner la limite de la suite (u_n)

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n, pour tout entier $n \geqslant 2$.

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

Exercice 3

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

b) En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

c) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

d) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

3. On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a) Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}([Y = n])$$

b) En déduire explicitement $\mathbb{P}([X = Y])$.

4. a) Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité p pour que $A(X, Y)$ ne soit pas diagonalisable.

b) On considère le script **Python** suivant :

```
m=int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i = 1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

Problème

Partie 1 : fonction génératrice d'une v.a.r. discrète finie

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k])\, t^k$$

1. Calculer $G(1)$.

2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3. Établir la relation : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Partie 2 : un résultat d'analyse

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4. a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
Indication : écrire $\ln(k+1) - \ln(k)$ *sous la forme d'une intégrale.*

b) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5. Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Partie 3 : étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

- On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$).
  L'expérience aléatoire consiste à prélèver tous ces jetons un par un, au hasard, et sans remise.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la v.a.r. égale au numéro du jeton obtenu lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
- Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a **record** à l'instant i si le $i^{\text{ème}}$ jeton tiré a un numéro plus grand que tous les numéros précédemment tirés.
  D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.
- Enfin, on note X_n la v.a.r. égale au nombre de records obtenus lorsque l'on procède à cette expérience dans une urne contenant n jetons.
  On note alors G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

6. Donner la loi de X_1.

7. ***a)*** Montrer : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $\big([A_n = n]\,, [A_n < n] \big)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n}\, \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\, \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

d) Donner la loi de X_4.

8. ***a)*** Vérifier que la formule obtenue à la question ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

9. En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

10. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer : $V_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie 4 : simulation informatique liée à l'expérience

Dans cette partie, on s'intéresse à la simulation **Python** de l'expérience aléatoire et des v.a.r. définies dans la partie précédente.

11. L'objectif de cette question est de coder une fonction **Python** permettant de simuler le tirage complet dans une urne possédant n jetons numérotés de 1 à n.

a) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie le vecteur ligne `B` obtenu en échangeant les coefficients en position `i` et `j` du vecteur ligne `A` (paramètre d'entrée de la fonction).

```
def echangeCoeff(A, i, j):
    B = np.copy(A)
    B[j] = ________
    B[i] = ________
    return B
```

b) On considère la fonction **Python** suivante.

```
def tirageComplet(n):
    A = np.arange(1,n+1)
    i = n-1
    for k in range(n):
        j = rd.randint(0, i+1)
        A = echangeCoeff(A, i, j)
        i = i-1
    return A
```

Commenter la stratégie adoptée dans cette fonction afin de répondre à l'objectif initial.
On précisera notamment ce que représente initialement le vecteur `A` et on commentera brièvement son évolution. On pourra proposer un exemple d'évolution du vecteur `A` lorsque $n = 4$ pour illustrer le propos.

12. On s'intéresse maintenant à la fonction **Python** suivante.

```
def mystere(n):
    A = tirageComplet(n)
    m = A[0]
    x = 1
    for k in range(1,n):
        if A[k] > m:
            m = A[k]
            x = x+1
    return x
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Que représente la variable `x` ? On fera le lien avec une v.a.r. précédemment définie.

13. On s'intéresse enfin à la fonction **Python** suivante.

```
def moyenne(n):
    N = 10000
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + mystere(n)
    return S / N
```

a) Quelle quantité est approchée par le nombre renvoyé par l'appel de `moyenne(n)` ? Expliquer.

b) L'appel `moyenne(10**4)` produit la valeur 9.78. On rappelle par ailleurs : $\ln(10) \simeq 2.3$. Commenter le résultat obtenu.