DS4 (vB)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie `numpy.random` de **Python** est importée avec la commande `import numpy.random as rd`.

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$. *On demande ici le détail de la démonstration et non le fait d'énoncer un résultat du cours.*

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

4. ***a)*** Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

a) Montrer les inclusions $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u^3)$.

b) Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

c) Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Problème 2

Partie I. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

a) Calculer, pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

b) Établir, pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x}$.

c) En déduire, pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}\,dx$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}$ définie sur $[0,1[$ se prolonge par continuité en 1. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie.

(ii) À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\,\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\,J_n(n)$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

2. *a)* Reconnaître, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([S_n \leqslant n])$ et $\mathbb{P}([S_n \geqslant n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!}\int_n^{n+1} \big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\,dt$$

c) En déduire que la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que les deux suites $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

4. *a)* **Pour les cubes**. Justifier, à l'aide du théorème central limite, l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

Pour les carrés. On admet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

b) On admet : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire, à l'aide de la question 1, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent et la limite de $\mathbb{P}([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n])$.

Partie II. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

5. On suppose que l'on a défini un entier N supérieur ou égal à 1 et que X est une v.a.r. à valeurs dans $[\![0, N-1]\!]$.

a) On note m le plus petit entier appartenant à l'ensemble $\{k \in [\![0, N-1]\!] \mid \mathbb{P}([X \leqslant k]) \geqslant \frac{1}{2}\}$. Montrer que m est une médiane de X.

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `mediane(proba)`, qui prend en paramètre une variable `proba`, liste de taille N contenant la loi de X, et renvoie une médiane de X.

6. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$.

a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) = \mathbb{E}(X) - r + 2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k)\,\mathbb{P}([X=k])$.

b) Démontrer : $\sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k)\,\mathbb{P}([X=k])$.

En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) = \mathbb{E}(X) + 2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big)$. Conclure.

d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).
En utilisant les questions ***3.*** et ***4.***, jutifier que n est une médiane de X.
En utilisant les questions ***6.a)*** et ***4.c)***, montrer que $\mathbb{E}\big(\,|X-n|\,\big)$ est équivalent à $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit $p \in\,]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p.
On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- × lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;
- × aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;
- × on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce.

On note Y le nombre de manches effectuées.

1. *Simulation informatique.* Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule l'expérience et renvoie le nombre de manches effectuées.

```
def simulExp(R, p):
    Y = 0
    nb_pieces = _____ # Nombre de pièces qu'il reste à lancer
    while nb_pieces != _____:
        Y = _________
        # Nombre de pile obtenus à cette manche
        nb_piles = _________________________________
        nb_pieces = ___________________________
    return Y
```

2. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.

3. ***a)*** Démontrer : $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$.

b) En déduire une nouvelle fonction **Python** `simulY(R,p)` simulant la variable aléatoire Y.

c) En déduire la loi de Y.

4. ***a)*** Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = \mathbb{P}\big([Y > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y = j]\big) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y > N]\big)$.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

d) En déduire que Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

5. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 1 - (1 - q^x)^R$.
Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ et montrer :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

Indication : faire apparaître une somme géométrique.

6. ***a)*** Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ f(k) \ \leqslant \ \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \ \leqslant \ f(k-1)$.

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\ dx \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{N} f(k) \ \leqslant \ \int_0^{N} f(x)\ dx + 1$.

c) Établir l'encadrement :

$$-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y) \ \leqslant \ 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R} \frac{1}{k+1}$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration : $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \underset{R \to +\infty}{\sim} \ln(R)$.