DS4 (vB) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie `numpy.random` de **Python** est importée avec la commande `import numpy.random as rd`.

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres (ESSEC I 2010)

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

- **2 pts**
  0 si résultat décrété sans justification

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

- **2 pts**

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(K_n) = 1$
- **1 pt :** 0 **valeur propre de** K_n **et** (Δ_2) **non vérifiée**

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

- **1 pt :** $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : montrer** $A_n \in \mathcal{D}_n$**,** $B_n \in \mathcal{D}_n$ **et** $A_n + B_n \notin \mathcal{D}_n$

4. ***a)*** Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

- **1 pt :** M **inversible ssi** $\det(M) \neq 0$
- **1 pr :** $\det(M) = xy$

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $N = \begin{pmatrix} s & x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$ **implique** $N - s\,I_2 \in \mathcal{D}_2$ **(qst *2.*)**
- **1 pt :** $N - s\,I_2 \in \mathcal{D}_2$ **implique** 0 **valeur propre donc** $N - s\,I_2$ **non inversible**
- **1 pt :** $N - s\,I_2$ **non inversible implique** $x = 0$ **ou** $y = 0$ **(qst *4.a)*), donc** N **triangulaire**

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** 3, 2 **et** 4 **valeurs propres de** A
- **1 pt :** A **n'admet pas d'autres valeurs propres, donc** $A \in \mathcal{D}_3$
- **1 pt :** A **diagonalisable**

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

- **3 pts :** $\mathrm{Sp}\left(M(t)\right) = \{2, 3, 4+2t\}$
- **1 pt :** $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in \mathcal{D}_3$

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

- **1 pt : si** $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$**, alors** $M(t)$ **diagonalisable**
- **4 pts : cas** $t = -1$
  - × **1 pt :** $E_2\big(M(-1)\big) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) = 2$
  - × **2 pts :** $M(-1)$ **diagonalisable**
- **2 pts : si** $t = -\frac{1}{2}$, $M(-\frac{1}{2})$ **non diagonalisable**

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

- **2 pts :** 0 **est valeur propre de** M **(par l'absurde)**
- **1 pt :** 0 **est la seule valeur propre possible de** M

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

- **1 pt :** $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$
- **1 pt :** $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$

b) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

- **4 pts : récurrence ($\forall i \geqslant 2,\ \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^i)$)**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **3 pts : hérédité (dont 1 pt inclusion $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^{i+1})$, et 2 pts inclusion $\text{Ker}(u^{i+1}) \subset \text{Ker}(u^2)$)**
- **1 pt :** $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$
- **1 pt : cas $p = 1$ ($u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ d'où $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)**
- **2 pts : cas $p > 1$**
  - × **1 pt :** $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$
  - × **1 pt :** $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$ **donc** $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt :** $\forall i \geqslant 1,\ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^i)$ **(récurrence immédiate)**
- **1 pt :** $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$ **donc** $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **d'où** $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

- **1 pt :** $\dim(\text{Ker}(u)) < \dim(\text{Ker}(u^2)) < \dim(\text{Ker}(u^3))$
- **1 pt :** $\text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- **1 pt :** $1 \leqslant \dim(\text{Ker}(u)) < \dim(\text{Ker}(u^2)) < \dim(\text{Ker}(u^3)) \leqslant 3$, **d'où :** $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$, $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$ **et** $\dim(\text{Ker}(u^3)) = 3$
- **1 pt :** $\text{Ker}(u^3) = \mathbb{R}^3$ **donc** $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} ac + be & bf & ad \\ de & ac + df & bc \\ cf & ae & be + df \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^3 = \begin{pmatrix} ade + bcf & a^2c + adf + abe & abc + b^2e + bdf \\ ac^2 + bce + cdf & bcf + ade & acd + bde + d^2f \\ ace + be^2 + def & bef + acf + df^2 & ade + bcf \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $\gamma(M)\, M + \delta(M)\, I_3 = \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix}$

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

- **2 pts :** $(\Rightarrow)$
  × **1 pt :** $\gamma(M)\, M + \delta(M)\, I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
  × **1 pt :** $\gamma(M) = \delta(M) = 0$ **par liberté de** (M, I_3)
- **1 pt :** $(\Leftarrow)$

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

- **1 pt :** M **nilpotente ssi** $\left\{ \begin{array}{ccc} c\,(1-f) & = & -f \\ e & = & -fc \end{array} \right.$
- **1 pt : si** $f = 1$**, alors** M **n'est pas nilpotente**
- **1 pt : si** $f \neq 1$, $(-\frac{f}{1-f}, -\frac{f^2}{1-f}, f)$ **solution du système. Donc il existe une infinité de triplet pour lesquels** M **est nilpotente**

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

- **1 pt :** $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 0 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 0 \end{pmatrix}$ **nilpotente si** $f \neq 1$
- **1 pt :** $M_f \in \mathcal{D}_3$ **(car** 0 **seule valeur propre de** M_f **d'après** ***7.*****)**
- **1 pt ; si de plus** $f \neq 0$, M_f **n'est pas triangulaire. Donc il existe une infinité de matrices non triangulaires dans** $\mathcal{D}_3$

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

- **2 pts :** $M_2 + I_3$ **convient (d'après** ***2.*****)**

Problème 2 (HEC 2014, parties II et III)

Partie I. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

- **1 pt : $t \mapsto t\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur le segment $[0, x]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\ \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est bien définie**
- **1 pt : IPP valide**
- **1 pt : $J_1(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$**

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\, x^n \mathrm{e}^{-x}$.

- **1 pt : $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, x]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^n\ \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est bien définie**
- **1 pt : IPP valide**
- **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\, x^n\ \mathrm{e}^{-x}$**

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt : $J_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$**

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

- **1 pt : La fonction $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est impropre en $+\infty$**
- **1 pt : $n!\ \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{x \to +\infty}{\sim} n!\ \mathrm{e}^{-x}\ \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$**
- **1 pt : croissance comparée**
- **1 pt : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente et vaut $n!$**

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x + \ln(1-x))}\, dx$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}$ définie sur $[0, 1[$ se prolonge par continuité en 1. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie.

- **1 pt : La fonction g_n est continue sur $[0, 1[$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x \to 1} g_n(x) = 0$**

(ii) À l'aide du changement de variable $t = n(1 - x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n!\ \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$$

- **1 pt : Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : t \mapsto 1 - \frac{t}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, n]$.**

- **1 pt :** $I_n = \displaystyle\int_n^0 \exp\left((n-t) + n\ln\left(\frac{t}{n}\right)\right) \frac{-1}{n}\, dt$
- **1 pt :** $I_n = n!\ \dfrac{\mathbf{e}^n}{n^{n+1}}\ J_n(n)$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

2. ***a)*** Reconnaître, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.

- **1 pt : indépendance**
- **1 pt : Par stabilité des lois de Poisson**
- **1 pt :** $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([S_n \leqslant n])$ et $\mathbb{P}([S_n \geqslant n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $[S_n \leqslant n] = \bigcup\limits_{k=0}^{n} [S_n = k]$
  - × **1 pt : argument d'incompatibilité**
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}\big([S_n \leqslant n]\big) = 1 - J_n(n)$
- **2 pts :**
  - × **1 pt : (cas** $n = 1$**)** $\mathbb{P}\big([S_n \geqslant n]\big) = J_{n-1}(n)$
  - × **1 pt : (cas** $n > 1$**)** $\mathbb{P}\big([S_n \geqslant n]\big) = J_{n-1}(n)$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt : La fonction** h_n **est dérivable sur** $\mathbb{R}^+$
- **1 pt :** $h_n'(x) = x^{n-1}\ (n-x)\ \mathbf{e}^{-x}$
- **1 pt :**

x	0		n		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h_n	0	$\nearrow$	$n^n\ \mathbf{e}^{-n}$	$\searrow$	0

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} \big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\, dt$$

- **1 pt :**

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n \ ((n+1)\, h_n(t) - h_{n+1}(t))\ dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\ dt\right)$$

- **1 pt : Chasles bien utilisé**
- **1 pt :** $(n+1)\, h_n(t) - h_{n+1}(t) = h_{n+1}'(t)$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^n \ ((n+1)\,h_n(t) - h_{n+1}(t))\ \ dt = \int_n^{n+1} \ h_{n+1}(n)\ dt$

c) En déduire que la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- **1 pt : La fonction h_{n+1} est croissante sur $[0, n+1]$.**
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($n \leqslant n+1$)**
- **1 pt : La suite $(\mathbb{P}([S_n \leqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante**

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **1 pt :**

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \frac{1}{n!}\ \left(\int_0^n \ (h_n(t) - n\ h_{n-1}(t))\ \ dt + \int_n^{n+1} \ h_n(t)\ dt\right)$$

- **1 pt : Chasles bien utilisé**
- **1 pt :** $h_n(t) - n\ h_{n-1}(t) = -h_n'(t)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^n \ (h_n(t) - n\ h_{n-1}(t))\ \ dt = -\int_n^{n+1} \ h_n(n)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \frac{1}{n!}\ \int_n^{n+1} \ (h_n(t) - h_n(n))\ dt$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($n \leqslant n+1$)**
- **1 pt : La suite $(\mathbb{P}([S_n(n) \geqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante**

e) Montrer que les deux suites $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

- **1 pt : ces deux suites sont décroissantes et minorées par** 0
- **1 pt : thm de convergence monotone**

4. a) **Pour les cubes**. Justifier, à l'aide du théorème central limite, l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

Pour les carrés. On admet : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

- **1 pt : hypothèses TCL (en particulier l'indépendance)**
- **1 pt :** $\displaystyle S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z$ **où** $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \mathbb{P}\left([S_n^* \leqslant 0]\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

b) On admet : $\displaystyle I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire, à l'aide de la question 1, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\displaystyle n! \ = \ \frac{n^{n+1}}{\mathbf{e}^n}\ \frac{I_n}{J_n(n)}$
- **1 pt :** $\displaystyle J_n(n) = 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $\displaystyle n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n$

c) Donner un équivalent et la limite de $\mathbb{P}([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\displaystyle\mathbb{P}([S_n = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n = n]) = 0$

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) + \mathbb{P}([S_n = n])$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \dfrac{1}{2}$

Partie II. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

5. On suppose que l'on a défini un entier N supérieur ou égal à 1 et que X est une v.a.r. à valeurs dans $[\![0, N-1]\!]$.

a) On note m le plus petit entier appartenant à l'ensemble $\{k \in [\![0, N-1]\!] \mid \mathbb{P}([X \leqslant k]) \geqslant \frac{1}{2}\}$. Montrer que m est une médiane de X.

- **1 pt : Par définition de m,** $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \frac{1}{2}$
- **1 pt : X est à valeurs entières**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \geqslant m]) > \frac{1}{2}$

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `mediane(proba)`, qui prend en paramètre une variable `proba`, liste de taille N contenant la loi de X, et renvoie une médiane de X.

```
def mediane(proba):
    k = 0 # décrit les valeurs possibles pour X
    S = proba[0] # somme des probabilités élémentaires
    while S < 1/2:
        k = k + 1
        S = S + proba[k]
    return k
```

- **1 pt : idée** $\mathbb{P}([X \leqslant k]) = \sum\limits_{j=0}^{k} \mathbb{P}([X = j])$
- **1 pt : initialisation des variables**
- **1 pt : condition boucle `while`**
- **1 pt : mise à jour des variables**
- **1 pt : bonus si tout est juste**

6. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$.

a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\big(|X - r|\big) = \mathbb{E}(X) - r + 2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k)\, \mathbb{P}([X = k])$.

- **1 pt : thm de transfert**
- **1 pt : preuve de la convergence absolue**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N} |k - r|\, \mathbb{P}([X = k]) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k)\, \mathbb{P}([X = k]) + \sum\limits_{k=r}^{N} (k-r)\, \mathbb{P}([X = k])$
- **1 pt : la famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement**

- **1 pt : fin du calcul**

b) Démontrer : $\sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k)\,\mathbb{P}([X=k])$.

En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) = \mathbb{E}(X) + 2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \dfrac{1}{2}\right)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \sum\limits_{j=0}^{k} \mathbb{P}([X=j])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum\limits_{j=0}^{r-1} \sum\limits_{k=j}^{r-1} \mathbb{P}([X=j])$ **(interversion de sommes)**
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{r-1} \sum\limits_{k=j}^{r-1} \mathbb{P}([X=j]) = \sum\limits_{j=0}^{r-1} (r-j)\mathbb{P}([X=j])$
- **1 pt :** $r = \sum\limits_{k=0}^{r-1} 1 = 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) = \mathbb{E}(X) + 2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \dfrac{1}{2}\right)$

c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big)$. Conclure.

- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big) = 2 \sum\limits_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \dfrac{1}{2}\right) - 2 \sum\limits_{k=0}^{m-1} \left(F(k) - \dfrac{1}{2}\right)$
- **1 pt : cas** $r = m$
- **2 pt : cas** $r > m$
- **2 pt : cas** $r < m$
- **1 pt : La suite** $\left(\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big)\right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ **admet un minimum, atteint en** m**. Ce minimum vaut** 0**.**

d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).
En utilisant les questions ***3.*** et ***4.***, jutifier que n est une médiane de X.

En utilisant les questions ***6.a)*** et ***4.c)***, montrer que $\mathbb{E}\big(\,|X-n|\,\big)$ est équivalent à $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \geqslant \frac{1}{2}$ **et** $\mathbb{P}([S_n \geqslant n]) \geqslant \frac{1}{2}$
- **1 pt :** n **est une médiane de** X
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(\,|X-n|\,\big) = 2 \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k)\,\mathbb{P}([X=k])$ **(**$X \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$ **donc** $\mathbb{E}(X) = n$**)**
- **2 pt :** $\mathbb{E}\big(\,|X-n|\,\big) = 2n\mathbb{P}([S_n = n])$

Exercice 3 (inspiré d'un oral ESCP)

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p.
On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- × lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;
- × aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;
- × on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce.

On note Y le nombre de manches effectuées.

1. *Simulation informatique.* Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule l'expérience et renvoie le nombre de manches effectuées.

```
def simulExp(R, p):
    Y = 0
    nb_pieces = _____ # Nombre de pièces qu'il reste à lancer
    while nb_pieces != _____:
        Y = _________
        # Nombre de pile obtenus à cette manche
        nb_piles = ______________________________
        nb_pieces = ________________________
    return Y
```

- **5 pt : 1 pt par ligne correcte**

2. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.

- **1 pt : explication expérience et v.a.r.**
- **1 pt :** $X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{1}{p}$ **et** $\mathbb{V}(X_k) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$

3. *a)* Démontrer : $Y = \max(X_1, \dots, X_R)$.

- **1 pt : explication simple et correcte de l'égalité**
- **1 pt : preuve à ω fixé**

b) En déduire une nouvelle fonction **Python** `simulY(R,p)` simulant la variable aléatoire Y.

```
def simulY(R,p):
    Y = rd.geometric(p)
    for k in range(R-1):
        X = rd.geometric(p)
        if X > Y:
            Y = X
    return Y
```

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : boucle for de bonne taille**
- **2 pt : structure conditionnelle**

- **1 pt : bonus si tout est juste**

c) En déduire la loi de Y.

- **1 pt :** $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k] \big) = 1 - q^k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y \leqslant k] \big) = \big(1 - q^k\big)^R$
- **1 pt : argument d'indépendance**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y = k] \big) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant k] \big) - \mathbb{P}\big([Y \leqslant k-1] \big)$

4. a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([Y = k] \big) = \mathbb{P}\big([Y > k-1] \big) - \mathbb{P}\big([Y > k] \big)$$

- **1 pt :** $[Y > k] \cup [Y = k] = [Y > k-1]$
- **1 pt :** Y **est à valeurs entières**
- **1 pt : incompatibilité**

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=1}^{N} j\, \mathbb{P}\big([Y = j] \big) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > j] \big) - N\, \mathbb{P}\big([Y > N] \big)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{N} j\, \mathbb{P}\big([Y = j] \big) = \sum\limits_{j=1}^{N} j\, \mathbb{P}\big([Y > j-1] \big) - \sum\limits_{j=1}^{N} j\, \mathbb{P}\big([Y > j] \big)$
- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{N} j\, \mathbb{P}\big([Y = j] \big) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > j] \big) - N\, \mathbb{P}\big([Y > N] \big)$

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

- **1 pt :** $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

d) En déduire que Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y > k] \big)$$

- **1 pt : La v.a.r.** Y **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\ n\ \mathbb{P}\big([Y = n] \big)$ **est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**
- **1 pt :** $N\ \mathbb{P}\big([Y > N] \big) = N\ \Big(1 - \big(1 - q^N \big)^R \Big)$
- **1 pt :** $1 - (1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{\sim} -\alpha\, x$
- **1 pt :** $N\ \big(1 - \big(1 - q^N \big)^R \big) \underset{N \to +\infty}{\sim} R\ N\, q^N$
- **1 pt :** $R\ N\, q^N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **par croissance comparée, car** $q \in\ ]-1, 1[$
- **1 pt : La série** $\sum\ q^n$ **est convergente en tant que série géométrique de raison** $q \in\ ]-1, 1[$.
  Il en est de même de la série $\sum\ R\ q^n$ **car on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel** $R \neq 0$.
- **1 pt : d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série** $\sum\ \mathbb{P}\big([Y > n] \big)$ **est convergente**

5. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 1 - (1 - q^x)^R$.

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ et montrer :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

Indication : faire apparaître une somme géométrique.

- **1 pt : La fonction** f **est continue sur** $[0, +\infty[$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ **est impropre en** $+\infty$**.**
- **4 pt :** $\displaystyle\int_0^{B} f(x)\ dx = \frac{-1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{\left(1 - \mathbf{e}^{\ln(q)\, B}\right)^{k+1}}{k+1}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$

6. ***a)*** Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \ \leqslant \ \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \ \leqslant \ f(k-1)$.

- **1 pt :** $f'(x) \ = \ R \ \left(1 - \mathbf{e}^{\ln(q)\, x}\right)^{R-1} \times \ln(q) \ \mathbf{e}^{\ln(q)\, x}$
- **1 pt :** f **est décroissante sur** $[0, +\infty[$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(k-1 \leqslant k)$

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\ dx \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{N} f(k) \ \leqslant \ \int_0^{N} f(x)\ dx + 1$.

- **1 pt : pour tout** $m \in \mathbb{N}^*$**,** $\displaystyle\int_0^{m} f(t)\ dt \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{m-1} f(k)$ **et** $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} f(k) \ \leqslant \ \int_0^{m} f(t)\ dt$
- **1 pt : première inégalité en** $m = N+1 \in \mathbb{N}^*$
- **1 pt : deuxième inégalité en** $m = N \in \mathbb{N}^*$ **et en ajoutant** $f(0) = 1$ **de part et d'autre**

c) Établir l'encadrement :

$$-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y) \ \leqslant \ 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration : $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \underset{R\to+\infty}{\sim} \ln(R)$.

- **1 pt : tout converge donc on peut faire un passage à la limite dans l'encadrement de la question précédente lorsque** $N \to +\infty$
- **1 pt :** $\dfrac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \ \leqslant \ \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \ \leqslant \ \dfrac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} + \dfrac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}}$
- **1 pt : justification division valide**
- **1 pt : par théorème d'encadrement :** $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y)}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = 1$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) \underset{R\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(R)}{\ln(q)}$