DS4 (vB) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie `numpy.random` de **Python** est importée avec la commande `import numpy.random as rd`.

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres (ESSEC I 2010)

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.

- Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } T \quad & \Leftrightarrow \quad T - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(T - \lambda \cdot I_n) < n \end{aligned}$$

Or :

$$\mathrm{rg}(T-\lambda\cdot I_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1-\lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

Comme $T - \lambda \cdot I_n$ est triangulaire, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(T - \lambda \cdot I_n) < n \quad & \Leftrightarrow \quad \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de } T - \lambda \cdot I_n \text{ est nul} \\ & \Leftrightarrow \quad \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que : } \alpha_i - \lambda = 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$.
Autrement dit, les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux (propriété (Δ_1)) et seulement ses coefficients diagonaux (propriété (Δ_2)).

- On réalise la même démonstration dans le cas où la matrice T est triangulaire inférieure.

$$\boxed{\text{Les matrices triangulaires de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$$

Commentaire

- Dans le programme officiel, on peut lire « Valeurs propres d'une matrice triangulaire ».
  L'énoncé commence donc par une démonstration de cours.
- Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(M)$.
  Et, par linéarité de la transposition : ${}^t(M - \lambda I_n) = {}^tM - {}^t(\lambda I_n) = {}^tM - \lambda I_n$.
  En combinant ces deux propriétés, on obtient que :

$$\begin{aligned} M - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} &\Leftrightarrow \text{rg}(M - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^t(M - \lambda I_n)) < n \\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^tM - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow {}^tM - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

  Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\text{Sp}(M) = \text{Sp}({}^tM)$.
  Cette remarque permet d'expliciter la deuxième partie de la démonstration : une matrice triangulaire inférieure a même spectre que sa transposée (qui est triangulaire supérieure).
- Au passage, on peut démontrer que toute matrice M est semblable à sa transposée (un peu technique avec le programme de ECE). Ce qui permet d'affirmer que :

$$M \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow {}^tM \text{ est diagonalisable}$$

  mais on s'écarte du sujet initial.

□

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha\, I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{D}_n$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \beta \text{ est valeur propre de } M + \alpha\, I_n &\Leftrightarrow (M + \alpha\, I_n) - \beta\, I_n = M - (\beta - \alpha)\, I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \beta - \alpha \text{ est une valeur propre de } M \\ &\Leftrightarrow \beta - \alpha \text{ est un coefficient diagonal de } M \qquad \textit{(car } M \in \mathcal{D}_n\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \beta - \alpha = m_{i,i} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \beta = m_{i,i} + \alpha \\ &\Leftrightarrow \beta \text{ est un coefficient diagonal de } M + \alpha \cdot I_3 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de $M + \alpha\, I_n$ sont exactement ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{D}_n \text{ alors } M + \alpha\, I_n \in \mathcal{D}_n.}$$

□

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.

- La matrice K_n n'est pas inversible. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right) & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & = & 1 \ < \ n \end{array}$$

  (on rappelle : $n \geqslant 2$)

- Ainsi, 0 est valeur propre de K_n et la propriété (Δ_2) n'est pas vérifiée par K_n.

$$\boxed{\text{On en déduit : } K_n \notin \mathcal{D}_n.}$$

Commentaire

- Ici, on démontre que K_n n'est pas inversible par un calcul de rang. On aurait aussi pu invoquer le fait que K_n possède 2 colonnes (ou 2 lignes) égales (ou simplement colinéaires). Un tel argument sera accepté au concours.
- On pouvait aussi remarquer :

$$K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Ainsi, n $(\neq 1)$ est valeur propre de K_n et n'est pas un coefficient diagonale de K_n.

□

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Démonstration.

- Étudions le cas $n = 2$.
  On pose : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  - × Comme ces deux matrices sont triangulaires, d'après la question ***1.*** : $A_2 \in \mathcal{D}_2$ et $B_2 \in \mathcal{D}_2$.
  - × Or : $A_2 + B_2 = K_2$. Ainsi, d'après ***3.a)*** : $A_2 + B_2 \notin \mathcal{D}_2$.
    On en déduit que $\mathcal{D}_2$ n'est pas stable par la loi $+$.
    Ainsi $\mathcal{D}_2$ n'est pas un espace vectoriel.
- Généralisons cette propriété au cas où n est quelconque.
  On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

× Comme ces deux matrices sont triangulaires, d'après la question ***1.*** : $A_n \in \mathcal{D}_n$ et $B_n \in \mathcal{D}_n$.

× Or : $A_n + B_n = K_n$. Ainsi, d'après ***3.a)*** : $A_n + B_n \notin \mathcal{D}_n$.

On en déduit que $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par la loi $+$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_n \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on recontre les questions :

× « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »

× « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »

× « La v.a.r. X admet une variance ? »

× « La matrice A est-elle diagonalisable ? »

× « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment). □

4. a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

Démonstration.
La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est carrée d'ordre 2.
Elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det(M) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}\right) = 0 \times z - y \times x = xy$$

$$\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } xy \neq 0 \text{ i.e. si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.}$$ □

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $N = \begin{pmatrix} s & x \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$.

- Alors $N - s\,I_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & t-s \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$ d'après la question ***2.***.
- Comme $N_2 - s\,I_2 \in \mathcal{D}_2$, en particulier, $N - s\,I_2$ vérifie (Δ_1). On en déduit que 0 est valeur propre de $N - s\,I_2$. D'où $N - s\,I_2$ n'est pas inversible.
- D'après la question précédente, on en déduit que $x = 0$ ou que $y = 0$.

  × Si $x = 0$, alors $N = \begin{pmatrix} s & 0 \\ y & t \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

  × Si $y = 0$, alors $N = \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & t \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

  Dans tous les cas, N est bien triangulaire.

$$\boxed{\text{On en conclut que toute matrice de } \mathcal{D}_2 \text{ est triangulaire.}}$$ □

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{3, 2, 4\}$.

- Démontrons que 3 est valeur propre de A.

$$\mathrm{rg}(A - 3\,I_3) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite possède deux colonnes égales : C_2 et C_3. Elle n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{3 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ (ou des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ) par lecture de la matrice $A - \lambda\,I_3$. Ici on a $\lambda = 3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_3(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 3\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, et qu'on choisit $x = 0$, il suffit de prendre $y = -z$ pour obtenir le vecteur nul.
En prenant (par exemple) $z = 1$, on obtient : $y = -1$.

On obtient ainsi : $E_3(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Démontrons que 2 est valeur propre de A.

$$\mathrm{rg}(A - 2\,I_3) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite possède deux colonnes égales : C_1 et C_2. Elle n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{2 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Comme dans la remarque précédente, on peut déterminer des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 2 par lecture de la matrice $A - 2\,I_3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 2\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre (par exemple) : $x = -1$, $y = 1$ et $z = 0$. On obtient ainsi : $E_2(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Démontrons que 4 est valeur propre de A.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - 4\,I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La réduite possède deux lignes proportionnelles : $L_2 = -L_3$. La matrice $A - 4\,I_3$ n'est donc pas inversible.

$$\boxed{4 \text{ est bien valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Comme dans la remarque précédente, on peut déterminer des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 4 par lecture de la matrice $A - 4\,I_3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_4(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 4\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre (par exemple) : $x = 1$, $y = -1$ et $z = 2$. On obtient ainsi : $E_4(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- On a démontré : $\{3,2,4\} \subset \mathrm{Sp}(A)$.
  Comme de plus, la matrice A est carrée d'ordre 3, elle ne peut avoir plus de 3 valeurs propres.
  On en déduit : $\mathrm{Sp}(A) = \{3,2,4\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } A \in \mathcal{D}_3.}$$

- On obtient :
  × A possède 3 valeurs propres **distinctes**,
  × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Les valeurs propres « possibles » de la matrice A peuvent se déduire de l'énoncé. C'est un cas fréquent. Il apparaît notamment lorsque l'on dispose d'un polynôme annulateur P : les racines de P sont les seules valeurs propres « possibles » de A. Cela signifie :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$$

  mais il reste à vérifier quelles racines de P sont vraiment des valeurs propres de A.
- Dans ce cas de figure, au lieu de chercher les valeurs λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible, il est préférable de déterminer si $A - \lambda I$ est inversible pour les valeurs de λ fournies (3, 2 et 4).
- On rappelle que la recherche des valeurs propres λ de A grâce à l'étude de $\mathrm{rg}(A - \lambda I)$ (dans le cas général où $\lambda \in \mathbb{R}$) est à réserver à la résolution d'exercices où l'on ne possède aucune information sur les valeurs propres de A et où l'on demande de déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
- Dans la question, il n'est pas demandé de déterminer $E_3(A)$, $E_2(A)$ et $E_4(A)$.
  On peut cependant affirmer, après les études effectuées dans les remarques précédentes :

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

  En effet :
  × l'espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension 1 au minimum. Comme de plus A est une matrice (carrée) d'ordre 3, la somme des dimensions des espaces propres est d'au plus 3. On en déduit :

$$\dim(E_3(A)) = \dim(E_2(A)) = \dim(E_4(A)) = 1$$

  × Ainsi :

$$E_3(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \dim\big(E_3(A)\big) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

  D'où : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On raisonne de même pour les autres sous-espaces propres.

□

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Déterminons le spectre de $M(t)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M(t) \quad & \Leftrightarrow \quad M(t) - \lambda\, I_3 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\left(M(t) - \lambda\, I_3\right) < 3 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\left(M(t) - \lambda\, I_3\right) & = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & -2+\lambda & 1+t-(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
Elle est donc inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\left(M(t) - \lambda\, I_3\right) \quad & \Leftrightarrow \quad 2-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = 3 \ \texttt{OU} \ \lambda = 4+2t \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}\left(M(t)\right) = \{2, 3, 4+2\,t\}.}$$

- Or, les coefficients diagonaux de $M(t)$ sont exactement les valeurs 2, 3, $4+2t$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in \mathcal{D}_3.}$$

Commentaire

- Il est `INTERDIT` de réaliser l'opération $L_3 \leftarrow (3-\lambda)\, L_3$ ou $L_3 \leftarrow (3-\lambda)\, L_3 - L_1$ en début de calcul. En effet, si $\lambda = 3$, réaliser de telles opérations ($L_3 \leftarrow 0$ ou $L_3 \leftarrow -L_1$) reviennent à supprimer l'information contenue dans la ligne L_3.
De telles opérations ne sont valides qu'à la condition $\lambda \neq 3$. Il faudrait alors rédiger par disjonction de cas ce qui s'avère inutilement compliqué.
- Par contre, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1$ est tout à fait légitime. Si $\lambda = 3$, elle consiste simplement à effectuer $L_3 \leftarrow L_3$ et ne provoque donc pas de perte d'information.

□

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Démonstration.
On procède par disjonction de cas.

- Si $4+2t \neq 2$ (*i.e.* $t \neq -1$) **et** $4+2t \neq 3$ (*i.e.* $t \neq -\frac{1}{2}$), alors :
  - × $M(t)$ admet trois valeurs propres **distinctes**,
  - × $M(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

  La matrice $M(t)$ est donc diagonalisable.

  $$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \tfrac{1}{2}\}, \text{ la matrice } M(t) \text{ est diagonalisable.}}$$

- Si $4+2t = 2$ (*i.e.* $t = -1$) **ou** $4+2t = 3$ (*i.e.* $t = -\frac{1}{2}$) :
  (c'est le cas contraire)

× Si $t = -1$: alors $\mathrm{Sp}\big(M(-1)\big) = \{2, 3\}$.

- Déterminons $E_2\big(M(-1)\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-1) - 2\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-1)\big) & \Leftrightarrow & \big(M(-1) - 2\,I_3\big)\,X = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \; x \; = \; -y \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(M(-1)) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (U_1, U_2)$ est donc :

× génératrice de $E_2\big(M(-1)\big)$,

× libre, car composée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de $E_2\big(M(-1)\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) \;=\; \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \;=\; 2$$

- On note : $E_3\big(M(-1)\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-1) - 3\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
Comme 3 est valeur propre de $M(-1)$, on en déduit :

$$\dim\Big(E_3\big(M(-1)\big)\Big) \geqslant 1$$

Soit $U_3 \in E_3\big(M(-1)\big) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M(-1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } M(-1) \text{ est diagonalisable.}}$$

× Si $t = -\frac{1}{2}$, alors : $\mathrm{Sp}\left(M(-\frac{1}{2})\right) = \{2, 3\}$.

- Déterminons $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-\frac{1}{2}) - 2\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) & \Leftrightarrow & (M(-\frac{1}{2}) - 2\,I_3)\,X = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & \frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ & & & & -\frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_2 \leftarrow -2\,L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1}{=}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}{=} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E_2\Big(M\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \texttt{ ET } z = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

- × génératrice de $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big)$,
- × libre, car composée uniquement d'une matrice non nulle.

La famille $\mathcal{F}_2$ est donc une base $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) = \operatorname{Card}(\mathcal{F}_2) = 1$$

- Déterminons $E_3(M(-\frac{1}{2})) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-\frac{1}{2}) - 3\, I_3\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) &\iff \big(M(-\tfrac{1}{2}) - 3\, I_3\big)\, X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & \frac{1}{2}\, z & = & 0 \\ & & -\ y & & -\frac{1}{2}\, z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2\, L_1 \\ L_2 \leftarrow -2\, L_2}}{=} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2\, y & + & z & = & 0 \\ & & 2\, y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$X \in E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ & & 2\,y & = & -z \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{=} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & z \\ & & 2\,y & = & -z \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_3\Big(M\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) &= \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \tfrac{z}{2} \texttt{ ET } y = -\tfrac{z}{2} \Big\} \\ &= \Big\{ \begin{pmatrix} \frac{z}{2} \\ -\frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est donc :

× génératrice de $E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)$,

× libre, car composée uniquement d'une matrice non nulle.

La famille $\mathcal{F}_3$ est donc une base $E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 1$$

Supposons que $M(-\frac{1}{2})$ soit diagonalisable. Alors il existe une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M(-\frac{1}{2})$. Par principe des tiroirs, deux de ces vecteurs se trouvent dans le même sous-espace propre ($E_2(M(-\frac{1}{2}))$ ou $E_3(M(-\frac{1}{2}))$). On a donc une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est absurde.

$$\boxed{\text{La matrice } M(-\tfrac{1}{2}) \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$$

□

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

Démonstration.

- Raisonnons par l'absurde.
  Supposons que 0 n'est pas valeur propre de M. Alors la matrice M est inversible.
  Or le produit de deux matrices inversibles est inversible. Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n est inversible.
  Or, comme M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Absurde !

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de } M.}$$

- Comme la matrice M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^p$ est un polynôme annulateur de M. Ainsi : $\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$.

$$\boxed{\text{La seule valeur propre } \underline{\text{possible}} \text{ de } M \text{ est donc } 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(M) = \{0\}.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

$$(\alpha\, Q)(A) \;=\; \alpha\, Q(A) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

$$R(A) \;=\; (A - 5\, I)\, Q(A) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle.
Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

Démonstration.

- Démontrons : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$.

  Soit $x \in \text{Ker}(u)$.
  Alors : $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :

  $$u^2(x) \;=\; u\big(u(x)\big) \;=\; u(0_{\mathbb{R}^3}) \;=\; 0_{\mathbb{R}^3}$$

  (où la dernière égalité est obtenue par linéarité de u).
  D'où : $x \in \text{Ker}(u^2)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)}$$

- Démontrons que $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

  Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$.
  Alors : $u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :

  $$u^3(x) \;=\; u(u^2(x)) \;=\; u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

  D'où $x \in \text{Ker}(u^3)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

  1 `Soit` $x \in \text{Ker}()$.
  2 `Alors` $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. `On en déduit :`
  3 $u^2(x) = \dots$
  4 $= \dots$
  5 $= 0_{\mathbb{R}^3}$
  6 `Ainsi,` $x \in \text{Ker}(u^2)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\text{Ker}(u)$ et on démontre qu'il est dans $\text{Ker}(u^2)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application.
  Dire : $x \in \text{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

  × La ligne 3 correspond aussi au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $x \in \text{Ker}(u^2)$ c'est exactement dire : $u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que u est linéaire).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

□

b) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$.

- Démontrons par récurrence : $\forall i \geqslant 2,\ \mathcal{P}(i) \quad$ où $\quad \mathcal{P}(i) : \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^i)$.
  - **Initialisation** :
    $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
    D'où $\mathcal{P}(2)$.
  - **Hérédité** : soit $i \geqslant 2$.
    Supposons $\mathcal{P}(i)$ et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$ (*i.e.* $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^{i+1})$).
    Procédons par double inclusion.

  ($\subset$) Démontrons : $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

  Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^i)$.
  Avec le même raisonnement qu'en question précédente, on a de plus : $\mathrm{Ker}(u^i) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

  ($\supset$) Démontrons que $\mathrm{Ker}(u^{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$.

  Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
  Il suffit alors de démontrer : $\mathrm{Ker}(u^{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^i)$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Alors} & u^{i+1}(x) = 0 & \\
\text{donc} & u^3(u^{i-2}(x)) = 0 & \\
\text{d'où} & u^{i-2}(x) \in \mathrm{Ker}(u^3) & \\
\text{ainsi} & u^2(u^{i-2}(x)) = 0 & (\textit{car } \mathrm{Ker}(u^3) = \mathrm{Ker}(u^2)) \\
\text{et enfin} & u^i(x) = 0 &
\end{array}$$

  On en déduit : $x \in \mathrm{Ker}(u^i)$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(u^{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

  D'où $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall i \geqslant 2,\ \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^i).}$$

- Par hypothèse, M est nilpotente. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  On en déduit : $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u^p(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi : $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
  Deux cas se présentent alors :
  - × si $p = 1$ alors : $\mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$.

    Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit que u est l'endomorphisme nul, c'est-à-dire : $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
    Par isomorphisme de représentation : $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Et donc : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
    Absurde !

× Si $p \geq 1$ alors, d'après le point précédent : $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
Comme $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$, on en déduit : $\text{Ker}(u^3) = \mathbb{R}^3$.
Ainsi : $u^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Et donc, par isomorphisme de représentation : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Ker}(u^2) \neq \text{Ker}(u^3).}$$

Commentaire

De manière générale, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors : $\text{Ker}(u) = E \Leftrightarrow u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En effet :

$$\text{Ker}(u) = E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E,\ u(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

□

c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

- Alors, par une récurrence similaire à celle de la question précédente : $\forall i \geqslant 1,\ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^i)$.
En particulier : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^p)$.
- Or : $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. D'où : $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Et donc : $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
D'après le point précédent, on en déduit : $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$. D'où : $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Ainsi $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et donc $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Ker}(u) \neq \text{Ker}(u^2).}$$

□

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$ et ces inclusions sont strictes.
On en déduit que :

$$\dim(\text{Ker}(u)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^2)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^3)) \qquad (*)$$

- Démontrons : $\text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  × Alors u est injectif. Or u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de **dimension finie**.
  Il est donc bijectif. Ainsi M est inversible.
  × De plus, M est nilpotente. Ainsi, d'après la question ***1.***, 0 est valeur propre de M.
  La matrice M n'est donc pas inversible.

  Absurde !
- On en déduit : $\dim(\text{Ker}(u)) \geqslant 1$. Comme de plus : $\text{Ker}(u^3) \subset \mathbb{R}^3$, on obtient d'après $(*)$:

$$1 \ \leqslant \ \dim(\text{Ker}(u)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^2)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^3)) \ \leqslant \ 3$$

D'où :

$$\dim(\text{Ker}(u)) = 1, \quad \dim(\text{Ker}(u^2)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(u^3)) = 3$$

- On obtient :
  - × $\ker(u^3) \subset \mathbb{R}^3$
  - × $\dim\big(\ker(u^3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

  On en déduit : $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$. D'où : $u^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix}$$

- Enfin :
  - × d'une part :

$$\begin{array}{rcl} M^3 & = & M \times M^2 \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix} \end{array}$$

  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rl} & \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 \\ = & (ac+be+df) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (ade+bcf)\, I_3 \\ = & \begin{pmatrix} 0 & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & 0 & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ade+bcf & 0 & 0 \\ 0 & ade+bcf & 0 \\ 0 & 0 & ade+bcf \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{M^3 = \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3}$$

□

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons M nilpotente.
Alors, d'après la question ***8.b)*** : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, d'après la question précédente :

$$\gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or la famille (I_3, M) est composée uniquement de deux matrices non proportionnelles. C'est donc une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire pouvant lier ces vecteurs est la relation triviale. D'où : $\delta(M) = \gamma(M) = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons $\delta(M) = \gamma(M) = 0$.
Alors, d'après la question précédente : $M^3 = \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, M est nilpotente.

$$\boxed{M \text{ est nilpotente } \Leftrightarrow \delta(M) = \gamma(M) = 0}$$

□

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$M \text{ nilpotente} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} e + c + f & = & 0 \\ e + cf & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c + f & = & -e \\ cf & = & -e \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c + f & = & cf \\ cf & = & -e \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c\,(1-f) + f & = & 0 \\ e & = & -fc \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c\,(1-f) & = & -f \\ e & = & -fc \end{array} \right.$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $f \neq 1$, alors :

$$M \text{ nilpotente} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & -\dfrac{f}{1-f} \\[2ex] e & = & -\dfrac{f^2}{1-f} \end{array} \right.$$

- Si $f = 1$, alors le système initial se réécrit : $\left\{ \begin{array}{rcl} e + c & = & -1 \\ e + c & = & 0 \end{array} \right.$.
  Ce système n'ayant pas de solution, M n'est pas nilpotente dans ce cas.

Ainsi, M est nilpotente si et seulement si $(c, e, f) \in \mathcal{S}$ où :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(c, e, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \mid c = -\tfrac{f}{1-f} \ \texttt{ET} \ e = -\tfrac{f^2}{1-f}\} \\ &= \{(-\tfrac{f}{1-f}, -\tfrac{f^2}{1-f}, f) \mid f \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}$ contient autant de triplets que de valeurs possibles pour f, c'est-à-dire autant que de réels différents de 1.

$$\boxed{\text{Il existe une infinité de choix pour le triplet } (c, e, f) \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ pour lesquels la matrice } M \text{ est nilpotente.}}$$

□

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

Démonstration.
Soit $f \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- D'après la question précédente, la matrice $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 0 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

  Or, d'après la question ***7.***, sa seule valeur propre est 0. On en déduit : $M_f \in \mathcal{D}_3$.
- Supposons de plus : $f \neq 0$. Alors la matrice M_f n'est pas triangulaire.

Ainsi : $\{M_f \mid f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\} \subset \mathcal{D}_3$.

$$\boxed{\mathcal{D}_3 \text{ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.}}$$

□

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Démonstration.
Soit $f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- D'après la question précédente : $M_f \in \mathcal{D}_3$.
- Ainsi, d'après la question ***2.*** : $M_f + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 1 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$.

  Toute matrice $M_f + I_3$ (avec $f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$) satisfait les contraintes de l'énoncé.

$$\boxed{\text{Pour } f = 2 \text{ (par exemple), on obtient } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3.}$$

□

Problème 2 (HEC 2014, parties II et III)

Partie I. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I

1. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto t\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur **le segment** $[0, x]$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\ e^{-t}\ dt$ est bien définie)

Commentaire

Déterminer l'intervalle de continuité de l'intégrande est important. Plus précisément (avec $a < b$) :
- × si f est continue sur **le segment** $[a, b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est bien définie.
- × si f est continue sur $]-\infty, b]$ (resp. $[a, +\infty[$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\ dt$ (resp. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$) est impropre en $-\infty$ (resp. $+\infty$).
- × si f est continue sur $]-\infty, +\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est doublement impropre.

- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} J_1(x) & = & \dfrac{1}{1!} \displaystyle\int_0^x t\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ \Big[-t\ \mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x - \displaystyle\int_0^x -\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & -(x\mathrm{e}^{-x} - 0) - \Big[\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x \ = \ -x\mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^{-x} - 1) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ J_1(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}}$$

□

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!} x^n \mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n\ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, x]$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^n\ e^{-t}\ dt$ est bien définie)

- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^n & \quad & u'(t) & = & n\ t^{n-1} \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & \quad & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcl} J_n(x) & = & \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x t^n\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & \dfrac{1}{n!} \left(\Big[-t^n\ \mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x + n \displaystyle\int_0^x t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \right) \\ & = & \dfrac{-1}{n!} \left(x^n\ \mathrm{e}^{-x} - 0 \right) + \dfrac{1}{n!}\ n \displaystyle\int_0^x t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ & = & J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\ x^n\ \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\ x^n\ \mathrm{e}^{-x}.}$$

□

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k(x) - J_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\ x^k\ \mathrm{e}^{-x}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces relations, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(J_k(x) - J_{k-1}(x) \right) & = & -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}\ x^k\ \mathrm{e}^{-x} \ = \ -\mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \\ \shortparallel & & \\ J_n(x) - J_0(x) & = & J_n(x) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) \end{array}$$

(par sommation télescopique)

- On en déduit :

$$J_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}.}$$

□

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto t^n \ \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  (ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \ e^{-t} \ dt$ est impropre en $+\infty$)
- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_0^x t^n \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \ = \ n! \ J_n(x) = n! \ \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \ = \ n! - n! \ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

- Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^n}{n!}$ (le terme dominant d'un polynôme est son terme de plus haut degré).
  On en déduit :

$$n! \ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x \to +\infty}{\sim} n! \ \mathrm{e}^{-x} \ \frac{x^n}{n!} \ = \ \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

- On en déduit :

$$\int_0^x t^n \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \ = \ n! - n! \ \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} n!$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \text{ est convergente et vaut } n!.}$$

□

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))} \ dx$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \mathrm{e}^{n\,(x+\ln(1-x))}$ définie sur $[0, 1[$ se prolonge par continuité en 1. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est bien définie.

Démonstration. La fonction g_n est continue sur $[0, 1[$ car elle est la composée $g_n = h_2 \circ h_1$ où :

- $h_1 : x \mapsto n\,(x + \ln(1 - x))$ est continue sur $[0, 1[$ et telle que : $h_1\big([0, 1[\big) \subset \mathbb{R}$.
- $h_2 = \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction g_n est prolongeable par continuité en 0. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \lim\limits_{x \to 1} \ \ln(1 - x) = -\infty \\ \text{donc} & \lim\limits_{x \to 1} \ n \ (x + \ln(1 - x)) = -\infty \qquad \textit{(car } n \geqslant 0\textit{)} \\ \text{et} & \lim\limits_{x \to 1} \ \exp\left(n \ (x + \ln(1 - x))\right) = \lim\limits_{X \to -\infty} \ \mathrm{e}^X = 0 \end{array}$$

On pose alors : $g_n(1) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ ainsi prolongée est continue sur } [0, 1].}$$

□

(ii) À l'aide du changement de variable $t = n(1 - x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n! \ \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \ J_n(n)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue alors le changement de variable $\boxed{t = n\ (1-x)}$:

$$\left| \begin{array}{l} t = n\ (1-x) \quad \text{(et donc } x = 1 - \frac{t}{n}) \\ \hookrightarrow dt = -n\ dx \quad \text{ et } \quad dx = -\dfrac{1}{n}\ dt \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = n \\ \bullet\ x = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : t \mapsto 1 - \frac{t}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, n]$.

En particulier : $nx = n - t$ et $n \ln(1-x) = n \ln\left(\dfrac{t}{n}\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 g_n(x)\ dx = \int_0^1 \exp(nx + n\ln(1-x))\ dx \\ &= \int_n^0 \exp\left((n-t) + n\ln\left(\frac{t}{n}\right)\right) \frac{-1}{n}\ dt \\ &= -\frac{1}{n} \int_n^0 \mathrm{e}^{n-t} \times \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{t}{n}\right)}\ dt = \frac{1}{n} \int_0^n \mathrm{e}^n \times \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{\ln\left(\left(\frac{t}{n}\right)^n\right)}\ dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^n}{n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} \times \left(\frac{t}{n}\right)^n\ dt = \frac{\mathrm{e}^n}{n}\ \frac{1}{n^n} \int_0^n \mathrm{e}^{-t} \times t^n\ dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ n!\ J_n(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\ n!\ J_n(n).}$$

□

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

2. a) Reconnaître, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.

Démonstration.
D'après l'énoncé, les v.a.r. X_i sont :

× indépendantes.

× de même loi $\mathcal{P}(1)$.

Par stabilité des lois de Poisson, on en déduit : $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} 1\right)$.

$$\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)}$$

□

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([S_n \leqslant n])$ et $\mathbb{P}([S_n \geqslant n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $[S_n \leqslant n] \ = \ \bigcup\limits_{k=0}^{n} [S_n = k]$.

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} [S_n = k]\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k]) & \textit{(car la famille } \big([S_n = k]\big)_{k \in [\![0,n]\!]} \textit{ est constituée} \\ & & & \textit{d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-n} \, \dfrac{n^k}{k!} & \\ & = & 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!}\right) & \\ & = & 1 - J_n(n) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}} \textit{ avec } x = n > 0) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}\big([S_n \leqslant n]\big) = 1 - J_n(n)}$$

- Ensuite : $[S_n \geqslant n] \ = \ \overline{[S_n < n]} \ = \ \overline{\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} [S_n = k]}$.

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) & = & 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} [S_n = k]\right) & \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([S_n = k]) & \textit{(car la famille } \big([S_n = k]\big)_{k \in [\![0,n-1]\!]} \\ & & & \textit{est constituée d'événements} \\ & & & \textit{2 à 2 incompatibles)} \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-n} \, \dfrac{n^k}{k!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{n^k}{k!} & \end{array}$$

  Deux cas se présentent alors :

  × si $n > 1$, d'après la question ***1.c)*** avec $n - 1 > 0$ et $x = n > 0$, on a :

$$1 - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \ = \ J_{n-1}(n)$$

  × si $n = 1$, alors :
  - d'une part : $J_0(n) = 1 - \mathrm{e}^{-n}$ d'après la question ***1.a)*** avec $x = n > 0$.
  - d'autre part : $1 - \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{0} \dfrac{n^k}{k!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-n} \, \dfrac{n^0}{0!} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-n} = J_0(n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}\big([S_n \geqslant n]\big) = J_{n-1}(n)}$$

□

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$h_n'(x) \ = \ n \, x^{n-1} \, \mathrm{e}^{-x} + x^n \, (-\mathrm{e}^{-x}) \ = \ \big(n \, x^{n-1} - x^n\big) \, \mathrm{e}^{-x} \ = \ x^{n-1} \ (n - x) \ \mathrm{e}^{-x}$$

- Comme $x^{n-1} > 0$ et $e^{-x} > 0$, $h_n'(x)$ est du signe de $n - x$.
On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		n		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h_n	0	$\nearrow$	$n^n\, e^{-n}$	$\searrow$	0

$\square$

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} \big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\ dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \\
= \ & (1 - J_{n+1}(n+1)) - (1 - J_n(n)) && \textit{(d'après la question 2.)} \\
= \ & J_n(n) - J_{n+1}(n+1) \\
= \ & \frac{1}{n!} \int_0^n h_n(t)\ dt - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{n+1} h_{n+1}(t)\ dt && \textit{(par définition)} \\
= \ & \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n (n+1)\, h_n(t)\ dt - \int_0^{n+1} h_{n+1}(t)\ dt \right) \\
= \ & \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n (n+1)\, h_n(t)\ dt - \int_0^n h_{n+1}(t)\ dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\ dt \right) && \textit{(par relation de Chasles)} \\
= \ & \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^n ((n+1)\, h_n(t) - h_{n+1}(t))\ dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\ dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégration)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
(n+1)\, h_n(t) - h_{n+1}(t) &= (n+1)\, t^n\, e^{-t} - t^{n+1}\, e^{-t} \\
&= t^n\, ((n+1) - t)\, e^{-t} \\
&= h_{n+1}'(t) && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^n ((n+1)\,h_n(t) - h_{n+1}(t))\ dt &= \int_0^n h'_{n+1}(t)\ dt \\
&= [\ h_{n+1}(t)\ ]_0^n \\
&= h_{n+1}(n) - \cancel{h_{n+1}(0)} \\
&= h_{n+1}(n) \\
&= \int_n^{n+1} h_{n+1}(n)\ dt \qquad \textit{(car } h_{n+1}(n) \textit{ est indépendant de la variable d'intégration } t\textit{)}
\end{aligned}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(n)\ dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\ dt \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(n) - h_{n+1}(t))\ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n))\ dt}$$

□

c) En déduire que la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction h_{n+1} est croissante sur $[0, n+1]$. Si $t \in [n, n+1]$, alors $t \geqslant n$ et ainsi :

$$h_{n+1}(t) \ \geqslant\ h_{n+1}(n) \quad \text{et donc} \quad h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geqslant 0$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($n \leqslant n+1$) :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n))\ dt \ \leqslant\ 0$$

On en déduit : $\mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) \ \leqslant\ \mathbb{P}([S_n \leqslant n])$.

$$\boxed{\text{La suite } (\mathbb{P}([S_n \leqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

□

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède comme dans la question ***3.b)***.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) \\
= \ & J_n(n+1) - J_{n-1}(n) && \textit{(d'après la question \textbf{2.})} \\
= \ & \frac{1}{n!} \int_0^{n+1} h_n(t)\ dt - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n h_{n-1}(t)\ dt \\
= \ & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{n+1} h_n(t)\ dt - \int_0^n n\ h_{n-1}(t)\ dt \right) \\
= \ & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{n} h_n(t)\ dt + \int_n^{n+1} h_n(t)\ dt - \int_0^n n\ h_{n-1}(t)\ dt \right) && \textit{(par relation de Chasles)} \\
= \ & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{n} \left(h_n(t) - n\ h_{n-1}(t)\right)\ dt + \int_n^{n+1} h_n(t)\ dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégration)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
h_n(t) - n\ h_{n-1}(t) &= t^n\,\mathrm{e}^{-t} - n\ t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t} \\
&= t^{n-1}\,(t-n)\,\mathrm{e}^{-t} \\
&= -h_n'(t) && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(h_n(t) - n\ h_{n-1}(t)\right)\ dt &= -\int_0^n h_n'(t)\ dt \\
&= -\left[\ h_n(t)\ \right]_0^n \\
&= -(h_n(n) - \cancel{h_n(0)}) \\
&= -h_n(n) \\
&= -\int_n^{n+1} h_n(n)\ dt && \textit{(car $h_n(n)$ est indépendant de la variable d'intégration t)}
\end{aligned}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) &= \frac{1}{n!} \left(-\int_n^{n+1} h_n(n)\ dt + \int_n^{n+1} h_n(t)\ dt \right) \\
&= \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} \left(h_n(t) - h_n(n)\right)\ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([S_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} \left(h_n(t) - h_n(n)\right)\ dt}$$

- La fonction h_n est décroissante sur $[n, +\infty[$. Si $t \in [n, n+1]$, alors $t \geqslant n$ et ainsi :

$$h_n(t) - h_n(n) \ \leqslant\ 0$$

- Et ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(n \leqslant n+1)$:

$$\mathbb{P}([S_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} \left(h_n(t) - h_n(n)\right)\ dt \ \leqslant\ 0$$

La suite $(\mathbb{P}([S_n(n) \geqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$\square$

e) Montrer que les deux suites $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Démonstration.

D'après les questions précédentes, ces suites sont décroissantes. Elles sont de plus minorées par 0. Elles sont donc convergentes.

$\square$

4. a) **Pour les cubes**. Justifier, à l'aide du théorème central limite, l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

Pour les carrés. On admet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, les variables X_i sont :
  - × indépendantes.
  - × de même loi (pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$).
    - ↪ admettent une espérance $m = 1$.
    - ↪ admettent une variance $\sigma^2 = 1$.

  D'après le théorème central limite, $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$

  où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- On en déduit que, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([S_n^* \leqslant b]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{b} \varphi(t)\ dt \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \ = \ \Phi(b)$$

- On remarque enfin :

$$\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \ = \ \mathbb{P}([S_n - n \leqslant 0]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right]\right) \ = \ \mathbb{P}\left([S_n^* \leqslant 0]\right)$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Commentaire

- On énonce fréquemment le TCL avec la v.a.r. $\overline{X_n}$, notamment dans le chapitre « Estimation ».
- L'énoncé présent démontre qu'il faut aussi savoir énoncer le TCL pour la v.a.r. S_n. On rappelle :

$$S_n^* \ = \ \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \ = \ \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \ = \ \frac{\frac{S_n}{n} - m}{\frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n}} \ = \ \frac{\frac{S_n}{n} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \ = \ \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X_n})}} \ = \ \overline{X_n}^*$$

$\square$

b) On admet : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire, à l'aide de la question 1, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***1.e)*** :

$$I_n \;=\; n!\ \frac{e^n}{n^{n+1}}\ J_n(n) \quad \text{donc} \quad n! \;=\; \frac{n^{n+1}}{e^n}\ \frac{I_n}{J_n(n)}$$

- Or, on a admis que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
- Et d'après la question ***2.b)*** :

$$J_n(n) = 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- Et ainsi : $n! \;=\; \dfrac{n^{n+1}}{e^n}\ \dfrac{I_n}{J_n(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{n+1}}{e^n}\ \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}{\frac{1}{2}} \;=\; \dfrac{n^n}{e^n}\ 2n\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \;=\; \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\ \sqrt{2\pi n}$

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Commentaire

Ce résultat est connu sous le nom de formule de Stirling (hors programme).

☐

c) Donner un équivalent et la limite de $\mathbb{P}([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Comme $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}([S_n = n]) = \dfrac{n^n}{n!}\ e^{-n}$.
- On en déduit, d'après l'équivalent démontré en question précédente :

$$\mathbb{P}([S_n = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n}\ \frac{1}{e^n} \;=\; \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\ \frac{n^n}{\cancel{e^n}}\ \cancel{e^n}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_n = n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n = n]) = 0}$$

☐

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n])$.

Démonstration.

On raisonne à l'aide de l'événement contraire :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([S_n \geqslant n]) & = & 1 - \mathbb{P}([S_n < n]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n-1]) \\
& = & 1 - \left(\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) - \mathbb{P}([S_n = n])\right) \\
& = & 1 - \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) + \mathbb{P}([S_n = n]) \\
& \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 - \dfrac{1}{2} + 0 \qquad \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{4.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = \frac{1}{2}.}$$

☐

Partie II. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \dfrac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

5. On suppose que l'on a défini un entier N supérieur ou égal à 1 et que X est une v.a.r. à valeurs dans $[\![0, N-1]\!]$.

a) On note m le plus petit entier appartenant à l'ensemble $\{k \in [\![0, N-1]\!] \mid \mathbb{P}([X \leqslant k]) \geqslant \frac{1}{2}\}$. Montrer que m est une médiane de X.

Démonstration. On a $X(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$ donc en particulier $\mathbb{P}([X \leqslant N-1]) = 1$. On en déduit que l'ensemble $\{k \in [\![0, N-1]\!] \,|\, \mathbb{P}([X \leqslant k]) \geqslant \frac{1}{2}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (il contient $N-1$). Ainsi m existe bien. Montrons que m est une médiane de X.

- Par définition de m, $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \geqslant \frac{1}{2}$.
- Par passage au complémentaire : $\mathbb{P}([X \geqslant m]) = 1 - \mathbb{P}([X < m])$. Or, toujours par définition de m et parce que X est à valeurs entières, $\mathbb{P}([X < m]) = \mathbb{P}([X \leqslant m-1]) < \frac{1}{2}$. D'où $\mathbb{P}([X \geqslant m]) > \frac{1}{2}$.

Donc m est bien une médiane de X. □

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `mediane(proba)`, qui prend en paramètre une variable `proba`, liste de taille N contenant la loi de X, et renvoie une médiane de X.

Démonstration. On déduit de la question précédente une manière de calculer la médiane via le vecteur contenant la loi de probabilité de X en remarquant que

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!],\ \mathbb{P}([X \leqslant k]) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}([X = j])$$

```
def mediane(proba):
    k = 0 # décrit les valeurs possibles pour X
    S = proba[0] # somme des probabilités élémentaires
    while S < 1/2:
        k = k + 1
        S = S + proba[k]
    return k
```

Ce programme renvoie bien le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}([X \leqslant k]) \geqslant \frac{1}{2}$, donc une médiane de X. □

6. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$.

a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\big(|X-r|\big) = \mathbb{E}(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\,\mathbb{P}([X=k])$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de transfert, sous réserve d'existence,

$$\mathbb{E}\big(|X-r|\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} |k-r|\ \mathbb{P}([X=k])$$

Soit $N \geqslant r$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} |k-r| \, \mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=0}^{r-1} |k-r| \, \mathbb{P}([X=k]) + \sum_{k=r}^{N} |k-r| \, \mathbb{P}([X=k]) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k]) + \sum_{k=r}^{N} (k-r) \, \mathbb{P}([X=k])\end{aligned}$$

Remarquons que $\sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k]) + \sum\limits_{k=0}^{r-1} (k-r) \, \mathbb{P}([X=k]) = 0$ d'où, en rajoutant ce terme à l'expression précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} |k-r| \, \mathbb{P}([X=k]) &= 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k]) + \sum_{k=0}^{N} (k-r) \, \mathbb{P}([X=k]) \\ &= 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k]) + \sum_{k=0}^{N} k \, \mathbb{P}([X=k]) - \sum_{k=0}^{N} r \, \mathbb{P}([X=k]) \\ &= 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k]) + \sum_{k=0}^{N} k \, \mathbb{P}([X=k]) - r\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=k])\end{aligned}$$

Or,

- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) = 1$ car la famille $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement. D'où

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

- X admet une espérance donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} k \, \mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{E}(X)$$

On en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} |k-r| \, \mathbb{P}([X=k]) = 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k]) + \mathbb{E}(X) - r$$

donc la série $\sum |k-r| \, \mathbb{P}([X=k])$ converge (et donc converge absolument, étant une série à termes positifs). Ainsi,

- l'utilisation du théorème de transfert est justifiée
- l'égalité $\mathbb{E}\big(|X-r|\big) = \mathbb{E}(X) - r + 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k])$ est démontrée

□

b) Démontrer : $\sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k) \, \mathbb{P}([X=k])$.

En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\big(|X-r|\big) = \mathbb{E}(X) + 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \dfrac{1}{2}\right)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r-1} F(k) &= \sum_{k=0}^{r-1} \mathbb{P}([X \leqslant k]) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}([X = j]) \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=j}^{r-1} \mathbb{P}([X = j]) && \textit{(en intervertissant les deux sommes)} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \mathbb{P}([X = j]) \sum_{k=j}^{r-1} 1 && \textit{(car } \mathbb{P}([X=j]) \textit{ ne dépend pas de } k\textit{)} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \mathbb{P}([X = j])(r-1-j+1) \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} (r-j)\mathbb{P}([X = j]) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\mathbb{P}([X = k]) && \textit{(en renommant l'indice)}
\end{aligned}$$

En utilisant la question 10.a), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) &= \mathbb{E}(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\,\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \mathbb{E}(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1} F(k)
\end{aligned}$$

Or, $r = \sum\limits_{k=0}^{r-1} 1 = 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2}$, d'où

$$\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) = \mathbb{E}(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

□

c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big)$. Conclure.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big) &= \mathbb{E}(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - \left(\mathbb{E}(X) + 2\sum_{k=0}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On sépare trois cas :

- Premier cas : $r = m$.
  Alors $\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big) = 0$
- Deuxième cas : $r > m$.
  Alors
  $$\mathbb{E}\big(\,|X-r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X-m|\,\big) = 2\sum_{k=m}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

Soit $k \in [\![m, r-1]\!]$. On a $k \geqslant m$ donc $[X \leqslant m] \subset [X \leqslant k]$. Par croissance de l'application probabilité, il vient $\mathbb{P}([X \leqslant m]) \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant k])$. D'où

$$\frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant m]) \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant k]) = F(k)$$

et finalement $F(k) - \frac{1}{2} \geqslant 0$. D'où

$$\mathbb{E}\big(\,|X - r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X - m|\,\big) \geqslant 0$$

- Troisième cas : $r < m$.
  Alors
  $$\mathbb{E}\big(\,|X - r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X - m|\,\big) = -2 \sum_{k=r}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$
  Soit $k \in [\![r, m-1]\!]$. On a $k < m$ donc $[X \leqslant k] \subset [X < m]$. Par croissance de l'application probabilité, il vient $\mathbb{P}([X \leqslant k]) \leqslant \mathbb{P}([X < m])$. Or $\mathbb{P}([X \geqslant m]) \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}([X < m]) \leqslant \frac{1}{2}$. D'où
  $$F(k) = \mathbb{P}([X \leqslant k]) \leqslant \mathbb{P}([X < m]) \leqslant \frac{1}{2}$$
  et finalement $F(k) - \frac{1}{2} \leqslant 0$. D'où
  $$\mathbb{E}\big(\,|X - r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X - m|\,\big) \geqslant 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } \Big(\mathbb{E}\big(\,|X - r|\,\big) - \mathbb{E}\big(\,|X - m|\,\big)\Big)_{r \in \mathbb{N}^*} \text{ admet un minimum, atteint en } m. \text{ Ce minimum vaut } 0.}$$

□

d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).
En utilisant les questions ***3.*** et ***4.***, justifier que n est une médiane de X.
En utilisant les questions ***6.a)*** et ***4.c)***, montrer que $\mathbb{E}\big(\,|X - n|\,\big)$ est équivalent à $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après les questions ***3.*** et ***4.***, les deux suites $\big(\mathbb{P}([S_n \leqslant n])\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathbb{P}([S_n \geqslant n])\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et convergent vers $\frac{1}{2}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([S_n \geqslant n]) \geqslant \frac{1}{2}$$

Or les v.a.r. X et S_n suivent la même loi (cf question ***2.a)***), donc

$$\mathbb{P}([X \leqslant n]) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X \geqslant n]) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\textit{i.e. } n \text{ est une médiane de } X.}$$

D'après la question ***6.a)***,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\,|X-n|\,\big) &= \mathbb{E}(X) - n + 2\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\,\mathbb{P}([X=k]) \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\,\mathbb{P}([X=k]) && \textit{(}X \hookrightarrow \mathcal{P}(n) \textit{ donc } \mathbb{E}(X)=n\textit{)} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \\
&= 2\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{n^k}{k!}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{n^k}{k!}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^k}{(k-1)!}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^{k+1}}{k!}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{-n}\frac{n^n}{(n-1)!} \\
&= 2n\mathrm{e}^{-n}\frac{n^n}{n!} \\
&= 2n\mathbb{P}([S_n=n])
\end{aligned}$$

D'après la question ***4.c)***,

$$\mathbb{E}\big(\,|X-n|\,\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

□

Exercice 3 (inspiré d'un oral ESCP)

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p.
On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

× lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;

× aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;

× on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce.

On note Y le nombre de manches effectuées.

1. *Simulation informatique.* Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule l'expérience et renvoie le nombre de manches effectuées.

```
def simulExp(R, p):
    Y = 0
    nb_pieces = _____ # Nombre de pièces qu'il reste à lancer
    while nb_pieces != _____:
        Y = _________
        # Nombre de pile obtenus à cette manche
        nb_piles = _________________________________
        nb_pieces = ___________________________
    return Y
```

Démonstration. On propose de compléter la fonction **Python** de la manière suivante :

```
def simulExp(R, p):
    Y = 0 # Y = nombre de manches effectuées
    nb_pieces = R # Nombre de pièces qu'il reste à lancer
    while nb_pieces != 0: # Tant qu'il reste des pièces à lancer
        # Mise à jour du nombre de manches effectuées
        Y = Y + 1
        # Nombre de pile obtenus à cette manche
        nb_piles = rd.binomial(nb_pieces, p)
        # Mise à jour du nombre de pièces qu'il reste à lancer
        nb_pieces = nb_pieces - nb_piles
    return Y
```

□

2. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, R]\!]$.

- Pour la $k^{\text{ème}}$ pièce, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de pile) indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtention de pile).
- La v.a.r. X_k est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience (nombre de lancers effectués avec la $k^{\text{ème}}$ pièce).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, R]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \forall k \in [\![1, R]\!] :\ \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{p} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X_k) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.}$$

□

3. a) Démontrer : $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y donne le nombre de manches effectuées lors de l'expérience. Il y a au minimum une manche effectuée (chaque pièce doit être lancée au moins une fois pour amener « pile »).

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

- Soit $\omega \in \Omega$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$Y(\omega) = n \quad \Leftrightarrow$ L'expérience s'est terminée en n manches

$\Leftrightarrow$ L'une (au moins) des pièces a été lancée n fois et les autres ont été lancées au plus n fois

$\Leftrightarrow$ Le rang d'apparition du premier « pile » d'une pièce (au moins) est n et les rangs d'apparition des autres « pile » sont inférieurs ou égaux à n

$\Leftrightarrow$ Parmi toutes les pièces, le rang d'apparition maximal du premier « pile » est n

$\Leftrightarrow$ $\max\big(X_1(\omega), \ldots, X_R(\omega)\big) = n$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } Y = \max(X_1, \ldots, X_R).}$$

Commentaire

- Cette égalité étant fournie par l'énoncé, l'absence de réponse à la question ***3.c)*** qui suit démontre que le candidat ne sait pas déterminer la loi du maximum de v.a.r. indépendantes. Cette question est ajoutée ici pour éviter qu'un candidat puisse être bloqué par une mauvaise compréhension de la v.a.r. Y.
- Il est difficile de savoir quel niveau de précision est attendu pour un tel résultat. Si ce résultat n'était pas présent dans l'énoncé, l'écrire dans une copie, même sans démonstration, suffirait à démontrer la bonne compréhension des v.a.r. considérées.
- Il n'est pas obligatoire d'introduire d'élément $\omega \in \Omega$ pour résoudre cette question. Détaillons ici une autre rédaction possible. La v.a.r. Y prend pour valeur le nombre de manches effectuées lors de l'expérience. Ce nombre de manches correspond exactement au nombre de lancers de la pièce qui a été lancée le plus grand nombre de fois. Autrement dit, Y prend pour valeur le rang d'apparition de « pile » de la dernière pièce qui a donné « pile ». On en déduit, au vu des définitions des v.a.r. $X_1, \ldots, X_R$: $Y = \max(X_1, \ldots, X_R)$.

□

b) En déduire une nouvelle fonction **Python** `simulY(R,p)` simulant la variable aléatoire Y.

Démonstration. On propose la fonction **Python** suivante, qui implémente un algorithme classique permettant de calculer le maximum de R nombres.

```python
def simulY(R,p):
    Y = rd.geometric(p)
    for k in range(R-1):
        X = rd.geometric(p)
        if X > Y:
            Y = X
    return Y
```

□

c) En déduire la loi de Y.

Démonstration.

- On l'a vu en question précédente : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Y \leqslant k]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{R} [X_i \leqslant k]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{R} \mathbb{P}\big([X_i \leqslant k]\big) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } X_1, \ldots, X_R\textit{)} \\ & = & \Big(\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k]\big)\Big)^R & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_R \textit{ ont toutes même loi)} \\ & = & \big(1-(1-p)^k\big)^R & \\ & = & \big(1-q^k\big)^R & \textit{(*)} \end{array}$$

Remarquons au passage que ce résultat est valable pour $k = 0$. En effet :
× $\mathbb{P}\big([Y \leqslant 0]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ car la v.a.r. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
× $\big(1-q^0\big)^R = (1-1)^R = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y \leqslant k]\big) = \big(1-q^k\big)^R}$$

- Démontrons le dernier point $(*)$. Comme la v.a.r. X_1 est à valeurs entières positives, on a :

$$[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant k]\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) & \textit{(car les événements de la famille } \big([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}\big) \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \sum\limits_{i=1}^{k} q^{i-1} & \\
& = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p\, \dfrac{q^0 - q^k}{1-q} & \\
& = & \cancel{p}\, \dfrac{1 - q^k}{\cancel{p}} &
\end{array}$$

- Pour déterminer la loi de Y, il reste encore à déterminer les valeurs de $\mathbb{P}\big([Y = k]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\begin{array}{rcll}
[Y \leqslant k] & = & [Y < k] \cup [Y = k] & \\
& = & [Y \leqslant k-1] \cup [Y = k] & \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)}
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([Y \leqslant k]\big) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant k-1] \cup [Y = k]\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant k-1]\big) + \mathbb{P}\big([Y = k]\big) & \textit{(car les événements } [Y \leqslant k-1] \textit{ et } [Y = k] \textit{ sont inconpatibles)}
\end{array}$$

Finalement :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big([Y = k]\big) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([Y \leqslant k-1]\big) \\
& = & \big(1 - q^k\big)^R - \big(1 - q^{k-1}\big)^R
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \left\{\begin{array}{l} - \ Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ - \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y = k]\big) \ = \ \big(1 - q^k\big)^R - \big(1 - q^{k-1}\big)^R \end{array}\right.}$$

Commentaire

- Dans cette question, on détermine la loi du maximum de v.a.r. indépendantes à valeurs entières. C'est une question qui apparaît de manière régulière aux concours. Les techniques de résolution développées dans cette question sont donc à considérer comme classiques et il convient de les maîtriser.
- On retiendra en particulier que pour toute v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y = k]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y \leqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([Y \leqslant k-1]\big)$$

Cette formule est fondamentale pour obtenir la loi de la v.a.r. Y.

□

4. a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[Y > k]\,\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\begin{array}{rcll} [Y > k] \cup [Y = k] & = & [Y \geqslant k] & \\ & = & [Y > k-1] & \quad \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\,[Y > k] \cup [Y = k]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Y > k]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) & \quad \textit{(car les événements } [Y > k] \textit{ et } [Y = k] \textit{ sont inconpatibles)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k])}$$

Commentaire

- Le résultat présenté ici est similaire à celui mis en avant dans la question précédente. Il est d'ailleurs possible de démontrer ce résultat à l'aide du résultat précédent. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant k-1]\,\big) & \quad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{[Y \leqslant k]}\right)\right) - \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{[Y \leqslant k-1]}\right)\right) & \\ & = & \Big(\cancel{1} - \mathbb{P}\big(\,[Y > k]\,\big)\Big) - \Big(\cancel{1} - \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1]\,\big)\Big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1]\,\big) - \mathbb{P}\big(\,[Y > k]\,\big) & \end{array}$$

  On a préféré opter dans ce corrigé pour une rédaction similaire à celle de la question ***3.c)*** car, comme signalé dans la remarque précédente, ces formules sont à considérer comme classiques et il faut savoir les démontrer indépendamment les unes des autres.
- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.

  On retiendra que derrière une formule reliant la probabilité de plusieurs événements, se cache souvent un résultat reliant ces différents événements.
- La formule énonce une différence entre des probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[Y > k-1] \setminus [Y > k] = [Y = k]$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\,[Y = k]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1] \ \setminus \ [Y > k]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1]\,\big) \ - \ \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1] \ \cap \ [Y > k]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Y > k-1]\,\big) \ - \ \mathbb{P}\big(\,[Y > k]\,\big) & \quad \textit{(car } [Y > k] \subset [Y > k-1]\textit{)} \end{array}$$

$\square$

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) \\
= \ & \sum_{j=1}^{N} j\,\Big(\mathbb{P}\big([Y>j-1]\big) - \mathbb{P}\big([Y>j]\big)\Big) && \textit{(d'après la question précédente et car } j \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\
= \ & \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j-1]\big) - \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) - \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{N-1} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([Y>0]) + \cancel{\sum_{j=1}^{N-1} j\,\mathbb{P}\big([Y>j]\big)} + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{N-1} j\,\mathbb{P}([Y>j]} + N\,\mathbb{P}([Y>N])\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)}$$

□

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après le cours, on a : } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha\,x + \underset{x\to 0}{o}(x).}$$

□

d) En déduire que Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>k]\big)$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\,\mathbb{P}\big([Y=n]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- D'après la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) - N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) \quad (*)$$

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) &= N\,\Big(1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[Y>N]}\Big)\Big) \\
&= N\,\big(1 - \mathbb{P}\big([Y \leqslant N]\big)\big) \\
&= N\,\Big(1 - \big(1-q^N\big)^R\Big) && \textit{(d'après la question } \textbf{3.c)} \textit{ avec } N \in \mathbb{N}^*\textit{)}
\end{aligned}$$

On déduit de la question ***4.c)*** : $1-(1+x)^\alpha = -\alpha\, x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et ainsi :

$$1-(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} -\alpha\, x$$

Par ailleurs, on a : $q^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $q \in\,]-1,1[$.
Ainsi, en prenant $\alpha = R$ et $x = -q^N$, on obtient :

$$1-\left(1-q^N\right)^R \underset{N\to+\infty}{\sim} \cancel{-}R\,(\cancel{-}q^N)$$

Finalement :

$$N\,\left(1-\left(1-q^N\right)^R\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} R\,N\,q^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissance comparée, car } q\in\,]-1,1[\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big) = N\,\left(1-\left(1-q^N\right)^R\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

- On a alors :

La série $\sum n\,\mathbb{P}\big([Y=n]\big)$ est convergente

$\Leftrightarrow$ La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

$\Leftrightarrow$ La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}\big([Y>j]\big)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente *(d'après la relation $(*)$)*

$\Leftrightarrow$ La série $\sum \mathbb{P}\big([Y>n]\big)$ est convergente

Or :

× $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $R\,q^n \geqslant 0$

× $\mathbb{P}\big([Y>n]\big) = 1-(1-q^n)^R \underset{n\to+\infty}{\sim} R\,q^n$

× La série $\sum q^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $q\in\,]-1,1[$.
Il en est de même de la série $\sum R\,q^n$ car on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel $R\neq 0$.

Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \mathbb{P}\big([Y>n]\big)$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } Y \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus, par passage à la limite dans l'égalité $(*)$ (toutes les quantités admettant une limite finie), on a :

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{N} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y>j]\big)\right) & - & \lim\limits_{N\to+\infty} \big(N\,\mathbb{P}\big([Y>N]\big)\big) \\ \| & & \| & & \| \\ \sum\limits_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}\big([Y=j]\big) & & \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>j]\big) & & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la v.a.r. } Y \text{ admet une espérance égale à : } \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y>j]\big).}$$

□

5. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 1 - (1 - q^x)^R$.

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ et montrer :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

Indication : faire apparaître une somme géométrique.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto q^x = \exp(x\ \ln(q))$ est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  - $\times$ $h_1 : x \mapsto \ln(q)\, x$ est :
    - continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
    - telle que $h_1\big([0, +\infty[\big) \subset \mathbb{R}$
  - $\times$ $h_2 : x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  La fonction f est elle-même continue sur $[0, +\infty[$ par somme et produits de fonctions continues sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est donc seulement impropre en $+\infty$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^B f(x)\ dx &= \int_0^B \Big(1 - \big(1 - q^x\big)^R\Big)\ dx \\
&= \int_0^B \Big(\big(1 - q^x\big)^0 - \big(1 - q^x\big)^R\Big)\ dx \\
&= \int_0^B q^x\ \frac{\big(1 - q^x\big)^0 - \big(1 - q^x\big)^R}{1 - \big(1 - q^x\big)}\ dx \\
&= \int_0^B q^x\ \left(\sum_{k=0}^{R-1} \big(1 - q^x\big)^k\right)\ dx \\
&= \int_0^B \left(\sum_{k=0}^{R-1} q^x\ \big(1 - q^x\big)^k\right)\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \int_0^B \Big(q^x\ \big(1 - q^x\big)^k\Big)\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \int_0^B \Big(\mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\ \big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\big)^k\Big)\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \frac{-1}{\ln(q)} \int_0^B \Big(-\ln(q)\ \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\ \big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\big)^k\Big)\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{R-1} \frac{-1}{\ln(q)} \left[\ \frac{\big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, x}\big)^{k+1}}{k+1}\ \right]_0^B \\
&= \frac{-1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{\big(1 - \mathrm{e}^{\ln(q)\, B}\big)^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

Or, comme $q \in \,]0,1[$, on a : $\ln(q) < 0$ et ainsi : $\mathrm{e}^{\ln(q)\,B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par somme et compositions de limites, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{k+1}}{k+1} & = & \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{1}}{1} & + & \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{2}}{2} & + & \cdots & + & \dfrac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{R}}{R} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle B\to+\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B\to+\infty} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle B\to+\infty} \\
 & & \dfrac{1^1}{1} & & \dfrac{1^2}{2} & & & & \dfrac{1^R}{R}
\end{array}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{B\to+\infty} \int_0^B f(x)\,dx \\
&= \lim_{B\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,B}\right)^{k+1}}{k+1}\right) \\
&= -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}.}$$

Commentaire

Les énoncés de type `TOP3` se distinguent des énoncés `TOP5` par un découpage plus faible des questions qui oblige le candidat à prendre plus d'initiatives. En particulier, cette question est à considérer comme très difficile. Afin d'éviter que cette question soit bloquante pour la suite, le résultat est fourni par l'énoncé.

□

6. a) Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k-1)$.

Démonstration.

- Par une démonstration similaire à celle effectuée en question ***5.*** (en remplaçant continue par dérivable) on démontre que la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$.
  Soit $x \in [0,+\infty[$.

  $$f'(x) = \cancel{-}R \left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,x}\right)^{R-1} \times \left(\cancel{-}\ln(q)\ \mathrm{e}^{\ln(q)\,x}\right)$$

  Comme $\ln(q) < 0$, alors $\ln(q)\ x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{\ln(q)\,x} \leqslant 1$. Ainsi : $\left(1-\mathrm{e}^{\ln(q)\,x}\right)^{R-1} \geqslant 0$.
  Comme $\ln(q) < 0$, alors $\ln(q)\ \mathrm{e}^{\ln(q)\,x} < 0$.

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement : } \forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) \leqslant 0. \\ \text{On en déduit que la fonction } f \text{ est décroissate sur } [0,+\infty[.\end{array}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k-1, k]$.

  $$\begin{array}{lccccc}
  \text{Comme} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\
  \text{alors} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k)
  \end{array}$$
  (par décroissance de la fonction f sur $[0,+\infty[$)

- La fonction f est continue sur le **segment** $[k-1, k]$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$ est bien définie.
  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\ f(k-1) & & & & \big(k-(k-1)\big)\ f(k) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$$

□

b) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^{N} f(x)\, dx + 1$.

Démonstration.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités de la question précédente :

$$\begin{array}{ccccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} f(k) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} f(k-1) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} f(k) \\ & & \shortparallel & & & & \\ & & \displaystyle\int_0^{m} f(t)\, dt & & \textit{(d'après la relation de Chasles)} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } m \in \mathbb{N}^* : \int_0^{m} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} f(k) \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{m} f(k) \leqslant \int_0^{m} f(t)\, dt.}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
  En utilisant la première inégalité précédente en $m = N+1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\int_0^{N+1} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k)$$

  En utilisant la deuxième inégalité précédente en $m = N \in \mathbb{N}^*$ et en ajoutant $f(0) = 1$ de part et d'autre, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^{N} f(t)\, dt + 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{N+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{N} f(k) \leqslant \int_0^{N} f(x)\, dx + 1.}$$

□

c) Établir l'encadrement :

$$-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \mathbb{E}(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration : $\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \underset{R\to+\infty}{\sim} \ln(R)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\ dx & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} f(k) & \leqslant & \displaystyle\int_0^{N} f(x)\ dx + 1 \\ & & \shortparallel & & \\ & & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) & \textit{(par définition de } f\textit{)} & \end{array}$$

Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge (d'après la question ***5.***) et que la série $\sum \mathbb{P}\big([Y > n]\big)$ est elle aussi convergente (d'après la question ***4.d)***), tous les termes de l'inégalité précédente admettent une limite finie. Par passage à la limite, on en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} f(x)\ dx & \leqslant & \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} f(k)\right) & \leqslant & \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\int_0^{N} f(x)\ dx + 1\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx & & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) & & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx + 1 \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} & & \mathbb{E}(Y) & & \displaystyle -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} + 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \mathbb{E}(Y) \ \leqslant\ 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}.}$$

- Pour R suffisamment grand, on a $R > 1$ et donc $\ln(R) > 0$. Par ailleurs $\ln(q) < 0$.
En divisant l'inégalité précédente par $-\dfrac{\ln(R)}{\ln(q)} \geqslant 0$, on obtient :

$$\frac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \ \leqslant\ \frac{\mathbb{E}(Y)}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \ \leqslant\ \frac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} + \frac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}}$$

Or :

× $\dfrac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{\ln(R)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'après le résultat donné par l'énoncé.

× $\dfrac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = -\dfrac{\ln(q)}{\ln(R)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc : $\dfrac{1}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} + \dfrac{-\frac{1}{\ln(q)} \sum\limits_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y)}{-\frac{\ln(R)}{\ln(q)}} = 1.$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y) \underset{R\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(R)}{\ln(q)}.}$$

□