Colles de Mathématiques en E2A
Intégration
Semaine 13 : 11-15 décembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XI : Intégration

1.1 Définitions

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle I.
- Intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction continue.
- Intégrale impropre d'une fonction continue f sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Intégrale doublement impropre d'une fonction continue f sur $\mathbb{R}$. Notion de convergence / divergence de ces intégrales impropres. Valeur d'une intégrale impropre en cas de convergence.
- Les intégrales impropres en un point fini sont `HORS-PROGRAMME`.
- Intégrale impropre absolument convergente.

1.2 Résultats

- Existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle. Une primitive d'une fonction continue est toujours de classe $\mathcal{C}^1$.
- Formule fondamentale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\, F(t) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

  si F est une primitive de f sur $[a, b]$.
- Le tableau des primitives usuelles doit être connu.
- Intégration par parties sur un segment (u et v doivent être de classe C^1).
- Changement de variable sur un segment (la fonction φ doit être de classe C^1). Tout changement de variable non affine doit être donné aux élèves.
- Critère de Riemann au voisinage de $+\infty$. Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence.
- Condition de convergence pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$. Calcul de cette intégrale dans le cas convergent. Ces intégrales sont des intégrales de référence.

- Propriétés générales : relation de Chasles, linéarité, croissance de l'intégrale (avec les bornes rangées dans l'ordre croissant).
- Caractérisation de la convergence des intégrales impropres de fonctions continues et positives via la majoration de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ ou de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ (peu utilisée).
- Critères de convergence des intégrales impropres de fonctions continues et positives : par comparaison, par négligeabilité, par équivalence (très souvent utilisées).
- Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.
- Méthode pour faire une comparaison série-intégrale. Dessin des différentes aires jouant un rôle à avoir en tête.

1.3 Méthodes

1. Il faut savoir dériver la fonction
$$H : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$$
La méthode est de passer par une primitive de f. On trouve alors
$$H'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$
2. Etude de l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   (a) On rappelle que f est continue sur $[a, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $+\infty$.
   (b) On prend $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\ \mathrm{d}t$ (intégrale sur le segment $[a, B]$ d'une fonction continue sur $[a, B]$, ce n'est pas une intégrale impropre) admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
   (c) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.
3. Etude de l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est continue sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.
   (a) On rappelle que f est continue sur $]-\infty, b]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $-\infty$.
   (b) On prend $A \in]-\infty, b]$ et on étudie si $\displaystyle\int_A^b f(t)\ \mathrm{d}t$ (intégrale sur le segment $[A, b]$ d'une fonction continue sur $[A, b]$, ce n'est pas une intégrale impropre) admet une limite finie lorsque $A \to -\infty$.
   (c) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.
4. Etude de l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) On rappelle que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) On choisit un nombre $c \in]-\infty, +\infty[$ le plus simple possible (0 en général).
   (c) On étudie séparément les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^c f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ en utilisant les méthodes précédentes.

(d) Si ces deux intégrales convergent, alors on conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

5. Si la formule de $f(t)$ est donnée par disjonction de cas sur la valeur de t (f définie par morceaux), alors on pensera à utiliser la relation de Chasles pour découper l'intégrale en plusieurs bouts calculables.
6. Pour utiliser la croissance de l'intégrale, on commence par minorer/majorer/encadrer l'intégrande puis on intègre. Attention à bien introduire les variables. Souvent, on doit introduire une variable t pour encadrer l'intégrande, mais une fois l'intégration faite, ce t devient une variable muette. Attention également à bien vérifier que les bornes sont rangées dans l'ordre croissant.
7. Pour utiliser les critères de comparaison, c'est pareil. On compare `TOUJOURS` les intégrandes. C'est seulement en second lieu que l'on dit des choses sur les intégrales (c'est analogue aux critères de comparaisons pour les SATP). Il ne faut pas confondre $f(t)$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.

2 Questions de cours

1. On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ \mathrm{d}t$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\ \mathrm{d}t$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \mathrm{e}^t}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.
5. Donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\ \mathrm{d}t$.
6. Donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^{10}}\ \mathrm{d}t$.