1 Equations différentielles linéaires : cas général

Théoreme 1 (Principe de superposition)**.** *Soient*

$$(E_1) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1$$

et

$$(E_2) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

deux équations différentielles linéaires à coefficients constants différant seulement par leur second membre. Soient y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1 + b_2$$

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Théoreme 2 (Solutions dans le cas homogène)**.** *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants $(E_0) : y' + ay = 0$ est*

$$\boxed{S_0 = \left\{t \mapsto Ce^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{-at}\right)}$$

Pour le dire autrement, y est une solution de (E_0) si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ce^{-at}$. En particulier, on remarque qu'il existe une infinité de solutions.

Théoreme 3 (Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy)**.** *Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy*

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0), qui est la fonction

$$f : t \mapsto ce^{-at}$$

Théoreme 4 (Solutions dans le cas où il y a un second membre)**.** *Soit (E) : $y' + ay = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée $y' + ay = 0$. L'ensemble des solutions de (E) est*

$$\boxed{S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\} = \left\{t \mapsto y_p(t) + Ce^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Théoreme 5 (Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy)**.** *Soit $c \in \mathbb{R}$ fixé. On considère le problème de Cauchy*

$$(P) \qquad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(0) = c \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

On considère dans la suite de cette partie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$(E) : y' + ay = b$$

et on suppose que $a \neq 0$.

Théoreme 6. *Si b est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante*

$$t \mapsto \frac{b}{a}$$

Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Théoreme 7. *Si b est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui est également une fonction polynomiale, de même degré que b.*

Théoreme 8. *On suppose que le second membre est de la forme $b : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. Alors il existe une solution particulière de (E) qui est de la forme $t \mapsto S(t)e^{\gamma t}$ où S est une fonction polynomiale. On peut préciser la forme de cette solution en distinguant deux cas.*

Premier cas : $\gamma \neq -a$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

Deuxième cas : $\gamma = -a$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Théoreme 9 (Solutions dans le cas homogène)**.** *Soit*

$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

On introduit le polynôme caractéristique *:*

$$\boxed{P(X) = X^2 + aX + b}$$

Notons Δ le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$. Il y a trois cas possibles :

- *Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors*

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t} \right) \end{aligned}$$

- *Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors*

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{ t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto te^{r_0 t}, t \mapsto e^{r_0 t} \right) \end{aligned}$$

- *Si $\Delta < 0$, alors le polynôme $P(X)$ n'admet pas de racines réelles et on ne peut rien dire (cas hors-programme).*

Théoreme 10 (Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy*

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0). Plus précisément,

- *Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction*

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

où (λ, μ) est le couple solution du système linéaire

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ r_1 \lambda + r_2 \mu = \beta \end{cases}$$

- *Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction*
$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$$
où (λ, μ) est le couple solution du système linéaire
$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \quad\quad\quad\quad \mu = \alpha \\ \lambda + r_0 \mu = \beta \end{cases}$$

Théoreme 11 (Solutions dans le cas où il y a un second membre)**.** *Soit $(E) : y''+ay'+by = c$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est*
$$\boxed{S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\}}$$
où S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée $y'' + ay' + by = 0$.

Théoreme 12 (Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy)**.** *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy*
$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$
Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

On considère dans la suite de cette partie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
$$(E) : y'' + ay' + by = c$$
et on suppose que $b \neq 0$.

Théoreme 13. *Si c est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante*
$$t \mapsto \frac{c}{b}$$
Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Théoreme 14. *Si c est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui est également une fonction polynomiale, de même degré que c.*

Théoreme 15. *On suppose que le second membre est de la forme $c : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. On rappelle qu'on note $P(X)$ le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E). Alors il existe une solution particulière de (E) qui est de la forme $t \mapsto S(t)e^{\gamma t}$ où S est une fonction polynomiale. On peut préciser la forme de cette solution en distinguant trois cas.*

Premier cas : γ n'est pas racine de $P(X)$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme
$$t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$$
où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

Deuxième cas : γ est une racine simple de $P(X)$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme
$$t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$$
où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

Troisième cas : γ est une racine double de $P(X)$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme
$$t \mapsto t^2R(t)e^{\gamma t}$$
où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

4 Quelques tracés de solutions de problèmes de Cauchy

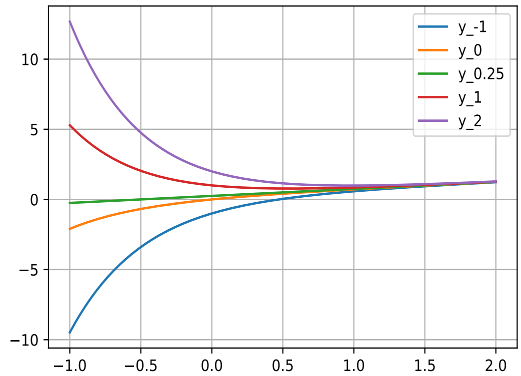
4.1 Un exemple d'ordre 1

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = t + 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

où α est un paramètre réel. L'unique solution de ce problème de Cauchy est $y_\alpha : t \mapsto \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + (\alpha - \frac{1}{4})\mathrm{e}^{-2t}$.

On peut tracer à l'aide de **Python** plusieurs solutions pour différentes valeurs du paramètre α (on gardera en tête qu'aucun de ces graphes ne se rencontrent) :



4.2 Un exemple d'ordre 2

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t + 1 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

où α et β sont deux paramètres réels. L'unique solution de ce problème de Cauchy est

$$y_{\alpha,\beta} : t \mapsto ((\alpha + \beta)t + \alpha + 1)\mathrm{e}^{-t} + t - 1$$

On peut tracer à l'aide de **Python** plusieurs solutions pour différentes valeurs des paramètres α et β :