Exos de cours

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = 0$
2. $y' + 4y = 0$
3. $y' + 7y = 0$
4. $y' = y$
5. $y' = 3y$
6. $y' = -y$

Exercice 2 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = 2$
2. $y' + 4y = 1$
3. $y' + 7y = -1$
4. $y' = y - 2$
5. $y' = 3y + 5$
6. $y' = -y - 7$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = t$
2. $y' + 4y = t^2$
3. $y' + 7y = t + 2$
4. $y' = y + 3t^2 - t$
5. $y' = 3y + 5t^2 - t + 3$
6. $y' = -y - 7t$

Exercice 5 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 4y = te^t$
2. $y' + 4y = te^{-4t}$
3. $y' + 7y = (t+2)e^{-t}$
4. $y' = y + (t+3)e^{2t}$
5. $y' = 3y + (-t+3)e^{-2t}$
6. $y' = -y - 7te^{-t}$

Exercice 6 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' - 4y = te^t \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 4y = te^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' - 4y = te^t \\ y(0) = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y' + 4y = te^{-4t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y' + 4y = te^{-4t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y' + 4y = te^{-4t} \\ y(0) = -1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y' + 7y = t + 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} y' + 7y = t + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} y' + 7y = t + 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' - 4y = 0$
4. $y'' + 2y' = 0$
5. $y'' + 2y' + y = 0$
6. $y'' - 2y' - 3y = 0$

Exercice 8 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 9 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2$
2. $y'' - 6y' + 9y = 1$
3. $y'' - 4y = -1$
4. $y'' + 2y' = -2$
5. $y'' + 2y' + y = 5$
6. $y'' - 2y' - 3y = -7$

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = t$
2. $y'' - 6y' + 9y = t^2$
3. $y'' - 4y = t + 2$
4. $y'' + 2y' = 3t^2 - t$
5. $y'' + 2y' + y = 5t^2 - t + 3$
6. $y'' - 2y' - 3y = -7t$

Exercice 11 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = t\mathrm{e}^t$
2. $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3t}$
3. $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2t}$
4. $y'' + 2y' = t\mathrm{e}^{-t}$
5. $y'' + 2y' + y = t^2\mathrm{e}^t$
6. $y'' - 2y' - 3y = t\mathrm{e}^{-t}$

Exercice 12 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = t\mathrm{e}^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = t\mathrm{e}^t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = t\mathrm{e}^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -7t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -7t \\ y(0) = -\frac{14}{3} \\ y'(0) = \frac{7}{3} \end{cases}$
9. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -7t \\ y(0) = \frac{7}{3} \\ y'(0) = -\frac{14}{3} \end{cases}$

Exercice 13 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x \\ y' & = & 3y \end{array} \right.$$

Exercice 14 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x \\ y' & = & 2y \\ z' & = & -2z \end{array} \right.$$

Exercice 15 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & y \end{array} \right.$$

Exercice 16 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -2x + 2z \\ y' & = & -3y - z \\ z' & = & -3z \end{array} \right.$$

Exercice 17 : Résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -2x - 3y + z \\ y' & = & -2y + z \\ z' & = & -2z \end{array} \right.$$

Exercice 18 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire $X' = AX$.
3. Expliciter une solution convergente non stationnaire ainsi qu'une solution divergente.
4. Montrer que toute trajectoire convergente converge vers un point d'équilibre.

Exercice 19 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le script **Python**

```
A = np.array([[0,-1,0],[-1,0,0],[1,1,1]])
print(al.matrix_power(A,2))
```

   renvoie

```
[[1  0  0]
 [0  1  0]
 [0  0  1]]
```

   En déduire un polynôme annulateur de A puis les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de A.

3. Montrer que la matrice A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre décroissant telles que $A = PDP^{-1}$.
4. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$. On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = DY$.
5. En déduire les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$.

Exercice 20 : On considère le système différentiel linéaire

$$(E) \qquad \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Définir une matrice A telle que
$$(E) \iff X' = AX$$
2. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.
3. (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1) : \varphi' = \varphi$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2) : \varphi' = -\varphi$.
   (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto ct\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3) : \varphi' = -\varphi + c\mathrm{e}^{-t}$.
4. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$. Montrer que α est solution de $(\mathscr{E}_1)$, γ est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et β est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.
5. En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + \lambda_3 \mathrm{e}^{t} \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)\mathrm{e}^{-t} + \lambda_3 \mathrm{e}^{t} \end{cases}$$
6. En déduire une solution non stationnaire qui converge vers l'unique état d'équilibre du système (E).

Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1

Exercice 21 : Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

1. $y' = 2y$
2. $y' - 3y = 0$
3. $y' + 4y = 0$

Exercice 22 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 23 : Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = 3$
2. $y' - y = t^2 + 1$
3. $y' + y = t\mathrm{e}^t$

Exercice 24 : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)\mathrm{e}^{3t}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto k(t)\mathrm{e}^{3t}$.

Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2

Exercice 25 : Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 2y = 0$

Exercice 26 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 27 : Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
2. $y'' - 3y' + 2y = t\mathrm{e}^t$
3. $y'' - 4y' + 4y = t\mathrm{e}^{2t}$
4. $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)\mathrm{e}^{-t}$
5. $y'' - 2y = \mathrm{e}^t$
6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 28 : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
2. En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Une équation différentielle non linéaire classique

Exercice 29 : Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

(E) $$y' = ay - aby^2$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
2. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
   (a) On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)\mathrm{e}^{-at}$.
   (b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))\mathrm{e}^{-at}}$.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Systèmes différentiels linéaires 2×2

Exercice 30 : On considère le système différentiel

(S) $$\begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

1. (a) Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède une unique valeur propre, que l'on déterminera.
   (b) En déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.

Pour toute la suite, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.

3. (a) En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.
   (b) En déduire que : $X' = AX \iff Y' = TY$.
4. (a) Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.
   (b) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.
   (c) Conclure.

Exercice 31 : On considère le système différentiel

(S) $$\begin{cases} x' &= x + 3y \\ y' &= x - y \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S).
2. Trouver les états d'équilibre du système (S).
3. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une qui ne soit pas stationnaire.
4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.
5. Déterminer l'unique solution de (S) vérifiant
$$\begin{cases} x(0) &= 7 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Exercice 32 : On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
3. Résoudre le système (S).
4. Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

Exercice 33 : On considère l'équation différentielle 2×2 suivante :

$$(E) \qquad x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres que l'on déterminera, puis donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.
2. Résoudre l'équation (E).

Systèmes différentiels linéaires 3×3

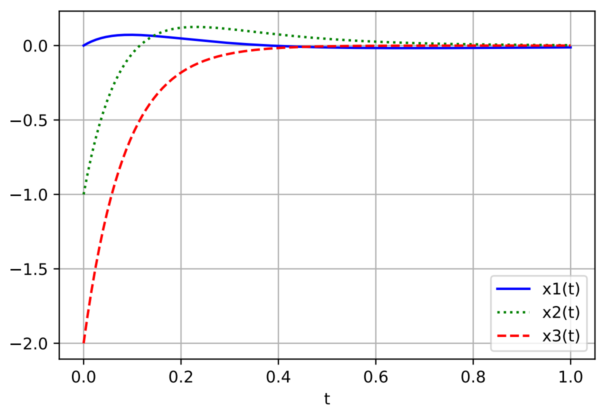
Exercice 34 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

1. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.
2. En déduire une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A puis donner les solutions du système différentiel linéaire

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = 6y - 6z \\ z' = 12z \end{cases}$$

3. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$? Déterminer cette solution.
4. Le graphe ci-dessous peut-il représenter une solution du système (S) ?



Exercice 35 : On considère le système différentiel linéaire

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 4y & - & 4z \\ y' & = & 3x & + & 2y & - & 4z \\ z' & = & 3x & - & 3y & + & z \end{array}\right.$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution de (S) vérifiant : $X(0) = X_0$.
2. Résoudre le système (S).
3. (a) Déterminer la trajectoire associée à la solution évoquée en question 1.

   (b) Cette trajectoire est-elle convergente ?