Exercices de cours

Exercice 1 : Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de F.
2. Montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X.
3. Reconnaître la loi suivie par X.

Exercice 2 : Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de F.
2. Montrer que F n'est pas une fonction de répartition.

Exercice 3 : Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de F.
2. Montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X.
3. Reconnaître la loi suivie par X.

Exercice 4 : Soit $a > 0$. Soient X et Y deux v.a.r. de fonctions de répartition respectives

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que X et Y sont deux v.a.r. à densité.

Exercice 5 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X.
2. Soit $h : x \mapsto \max(1, x)$. Dresser le tableau de variations de h puis déterminer $h([0, +\infty[)$.
3. Déterminer $Y(\Omega)$ et la fonction de répartition de Y.
4. Représenter graphiquement cette fonction de répartition.
5. Y est-elle une v.a.r. à densité ? une v.a.r. discrète ?

Exercice 6 : On considère une v.a.r. à densité X, dont la fonction de répartition est

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer une densité de X.

Exercice 7 : On considère une v.a.r. à densité X, dont la fonction de répartition est

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

est une densité de X.

Exercice 8 : On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X.

Exercice 9 : On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{si } x > \mathrm{e} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant 2])$ puis $\mathbb{P}(\left[\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right])$.

Exercice 10 : On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f puis montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Expliciter F_X.
3. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X > \dfrac{1}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \dfrac{1}{3}\right]\right)$.

Exercice 11 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \mathrm{e}^{2x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité.

Exercice 12 : Déterminer $h(I)$ dans les cas suivants :

1. $h : x \mapsto x+1$ et $I = [0,4]$
2. $h : x \mapsto 4x-5$ et $I = \mathbb{R}$
3. $h : x \mapsto -x+2$ et $I = [0,+\infty[$
4. $h : x \mapsto -2x+2$ et $I = [0,1]$
5. $h : x \mapsto 3x$ et $I = [-1,1]$
6. $h : x \mapsto 2x+3$ et $I = [0,+\infty[$
7. $h : x \mapsto 2x+3$ et $I = [1,+\infty[$
8. $h : x \mapsto -4x+1$ et $I = [0,1[$
9. $h : x \mapsto 2x+4$ et $I =]-2,2[$

Exercice 13 : Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On note $Y = 2X+1$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.
3. Reconnaître la loi de Y.

Exercice 14 : Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1,2])$. On note $Y = -3X+2$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.
3. Reconnaître la loi de Y.

Exercice 15 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. On pose $Y = 1 - 2X$. Déterminer la fonction de répartition de Y.
4. Montrer que Y est une v.a.r. à densité, puis déterminer une densité de Y.

Exercice 16 : Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$. Notons $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

Exercice 17 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Y.

Exercice 18 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$?

Exercice 19 : Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[-2,2]$. La v.a.r. X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de X puis donner sa fonction de répartition F_X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$. La variable aléatoire Y admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de Y.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Z = X + Y$. On pourra considérer le système complet d'événements $([X < 0], [X \geq 0])$. La v.a.r. Z admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de Z.

Exercice 20 :(d'après `EDHEC 2002`)

Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière par défaut de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z},\ [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$.

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k-1])$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) En utilisant le système complet d'événements $\big([Y = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer :
   $$\forall x \in [0,1[\,,\ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$
   (c) En déduire une densité f de Z.

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty,1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X_1.

3. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.
4. On pose $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Vérifier que Y et Z sont des variables aléatoires réelles à densité, puis déterminer une densité de Y et une densité de Z. Étudier l'existence des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$ de Y et Z, et les calculer lorsqu'elles existent.

Exercice 22 : (d'après `HEC 2010`)

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U + V$ est à densité à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U + V$.

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t)\ dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.
2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda |x|}$$

3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.

Exercice 23 : Soit X une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 24 : Soit X une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 25 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On note Y la v.a.r. définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y puis tracer son graphe. La v.a.r. Y est-elle une v.a.r. à densité ?
2. Justifier que $Y = \dfrac{X + |X|}{2}$.
3. Déterminer la loi de $Z = |X|$.
4. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 26 : Soit X une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La v.a.r. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 27 : On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La v.a.r. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 28 : À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ?

Exercice 29 : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $\lambda > 0$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de M_n et reconnaître sa loi.

Exercice 30 : Calculer les intégrales impropres suivantes en utilisant la « méthode des moments ».

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ $(a > 0)$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ $(a > 0)$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t^2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ $(a > 0)$

Exercice 31 : On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 16)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}([Y < 7])$ et $\mathbb{P}([Y \leqslant 12, 12])$.
2. (a) Déterminer le seuil x tel que : $\mathbb{P}([Y \leqslant x]) = 0, 9162$.
   (b) Déterminer le seuil y tel que $\mathbb{P}([Y > y]) = 0, 9418$.

Fonction de répartition et densité de probabilité

Exercice 32 :(d'après `HEC - Maths III - 1982`) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \alpha\, x^{-4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité. On note alors X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Pour tous réels x et a tels que $a > 1$, calculer $F_a(x) = \mathbb{P}_{[X>a]}([X < x])$.
4. Soit $a > 1$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = aX$. En déduire une densité de Y.

Exercice 33 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leq x \leq \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) A l'aide du graphe de f, conjecturer une relation entre $\mathbb{P}([X \leq -x])$ et $\mathbb{P}([X \geq x])$, pour tout $x \geq 0$, puis la démontrer. Pour tout réel x, déterminer une relation entre $F(-x)$ et $F(x)$.

Opérations sur les variables à densité

Exercice 34 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$. La variable Y est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, déterminer une densité de Y.
2. De même, déterminer la fonction de répartition de X^2, et une densité de X^2 s'il s'agit d'une variable aléatoire à densité.
3. De même, déterminer la loi de X^3.
4. On définit la variable aléatoire Z par :
$$Z = \frac{1}{X} \text{ si } X > 0 \quad \text{et} \quad Z = 0 \text{ si } X = 0$$
Déterminer la loi de Z.

Exercice 35 :*(d'après* `EDHEC 2008`*)*

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ est convergente et donner sa valeur.
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :
$$g(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^x f\left(\mathrm{e}^x - 1\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
   (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 36 : Soit X une variable aléatoire admettant une densité f définie et continue sur $\mathbb{R}$ et paire. On note F la fonction de répartition de X.

1. Montrer que, pour tout réel x, $F(x) + F(-x) = 1$.
2. On suppose que la variable X^2 suit la loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer alors la fonction de répartition F de X, puis la densité f.

Espérance et variance

Exercice 37 :*(d'après* `EML 2002`*)*

On note $a = -\dfrac{\ln(9) - \ln(5)}{\ln(9) - \ln(4)}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a; +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.
2. Déterminer une densité f de Y.

3. Montrer que Y admet une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
4. (a) Montrer que la variable $Z = \left(\dfrac{4}{9}\right)^Y$ admet une espérance. La calculer.
   (b) De même, montrer que Z admet une variance, et la calculer.

Exercice 38 : *(d'après* `HEC 2007 - Maths III`*)*
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{-|x|}$.
   (a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)\,dx$ sont convergentes et de même valeur.
   (b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité.
On dit alors que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
3. (a) Pour $r \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $m_r(Y)$ (moment d'ordre r de Y).
   (b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r. Quelles sont les valeurs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et de la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la v.a.r. Y ?

Exercice 39 : Soit X une variable aléatoire positive à densité. Soit f une densité de X. On suppose que f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $[0, +\infty[$, et qu'il existe un réel λ strictement positif tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\,dt$ est convergente.

1. Montrer que pour tout réel $x \in \,]0, \lambda[$, e^{xX} admet une espérance.
2. Montrer que : $\forall a > 0,\ \forall x \in \,]0, \lambda[,\ \mathbb{P}([X \geq a]) \leq \mathrm{e}^{-ax}\, \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{xX}\right)$.

Exercice 40 : Soit X une v.a.r. positive à densité. On suppose que X admet une densité f continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0[$. On suppose également que X admet une espérance.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,\mathbb{P}([X \geq x]) = 0$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X \geq t])\,dt$ converge, et est égale à $\mathbb{E}(X)$.

Problèmes

Exercice 41 : *(d'après* `ECRICOME 2007`*)*
Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin réalise une étude du temps moyen de passage en caisse.
Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
   Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.
2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera. Quel est le temps moyen de passage en caisse (en unités de temps) ?

3. (a) Démontrer que la fonction de répartition de T, est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   (b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\frac{2\mathrm{e}-3}{2\mathrm{e}}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé.
On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.
   (a) M désigne le temps d'attente de C. Écrire M en fonction de T_A et T_B.
   (b) Montrer que la fonction de répartition de la v.a.r. M est donnée par :

$$F_M(t) = \begin{cases} 1 - (1+t)^2\,\mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   (c) Prouver que M est une variable à densité et en donner une densité.

Exercice 42 : Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle d'attente de la gare de Lyon. On suppose que la variable aléatoire réelle N_t égale au nombre de voyageurs arrivant entre les instants 0 et t, avec $t > 0$, suit une loi de Poisson de paramètre αt, avec $\alpha > 0$.

1. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier voyageur.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}([X_1 > t])$, pour tout réel t strictement positif, puis reconnnaître la loi de X_1.
   (b) Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.
2. (a) Soit $n \geq 2$. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ voyageur. On note F_n la fonction de répartition de X_n.
Décrire, pour $t > 0$, l'événement $[X_n > t]$ à l'aide de la variable N_t. Montrer que : $\forall t > 0,\ F_n(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\alpha t)^k}{k!}$.
   (b) En déduire, pour tout $n \geq 2$, une densité f_n de X_n.
   (c) Montrer que X_n admet une espérance et une variance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donner les valeurs de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Loi du min, du max de deux v.a.r. à densité

Exercice 43 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
On définit les variable aléatoires $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Démontrer que :
$$[U > t] = [X > t] \cap [Y > t] \qquad \text{et} \qquad [V \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t]$$
2. Déterminer la fonction de répartition G, puis une densité g de U.
3. Déterminer la fonction de répartition H, puis une densité h de V.
4. Calculer l'espérance de U.
5. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y. En déduire l'espérance de V.

Simulation informatique

Exercice 44 : *(d'après* `EML 2007`*)*
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

1. l'événement $[Y = 0]$ est égal à l'événement $[X < 1]$,
2. pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $[Y = n]$ est égal à l'événement $[n \leq X < n+1]$.

On remarquera que $Y = \lfloor X \rfloor$.

1. Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathbb{P}([Y = n]) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-n}$.
2. Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
3. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
u = rd.random()
y = _____
while ___________________ :
    ____________
    ____________________
print('Y vaut ', y)
```

   Quel est le nombre moyen de passages dans la boucle `while` ? *(on comptera le nombre de tests effectués)*

4. On note U une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   (a) Déterminer la loi de la variable $Z = -\ln(1 - U)$.
   (b) En déduire un second programme qui simule la variable aléatoire Y.

Exercice 45 :

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ n variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère S_n la variable aléatoire définie par :

$$S_n = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

1. Écrire un programme simulant une réalisation de la variable S_n, l'entier n étant entré au clavier.
2. Déterminer la loi de la variable S_n.

Partie 2

Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la v.a.r. S_k par : $S_k = \max(U_1, U_2, \ldots, U_k)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une v.a.r. X_n qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$, et indépendante de $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$. On pose alors $T_n = S_{X_n}$.

1. Donner la fonction de répartition G_n de la variable aléatoire T_n. On pourra considérer le système complet d'événements $\left([X_n = k]\right)_{1 \leq k \leq n}$.
2. En déduire que T_n est une variable aléatoire à densité. En donner une densité, puis calculer l'espérance et la variance de T_n.
3. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un tableau `S` et renvoie son plus grand élément.
4. Écrire un programme en **Python** permettant de simuler T_{10}.
5. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(T_n)$.
6. Étudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$, c'est-à-dire déterminer, pour tout réel t, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} G_n(t)$.

Exercice 46 : On considère le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
a = int(input('Entrer un réel strictement positif : '))
u = rd.random() * a
v = a - u
if v > u :
    w = v
else :
    w = u
print(u,v,w)
```

On note U, V, W les variables aléatoires égales aux valeurs des variables `u,v,w` après exécution du programme. Quelles sont, en fonction du réel a, les lois des variables U, V et W ?

Simulation de v.a.r. par la méthode d'inversion

La méthode d'inversion est une généralisation du résultat suivant.

1. Soit X une v.a.r. . On suppose que sa fonction de répartition F_X réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
2. Soit U une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$,

Alors les v.a.r. $F^{-1}(U)$ et X ont la même loi. Ainsi, pour simuler la v.a.r. X, il suffit de simuler la v.a.r. $F^{-1}(U)$.

Exercice 47 :*(d'après* `HEC 2007`*)*
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathbb{P})$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} \times \mathrm{e}^{-|x|}$. *(dans l'exo on montre que les intégrales* $\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ *et* $\int_{0}^{+\infty} g(x)\,dx$ *sont convergentes, de valeur* $\frac{1}{2}$ *et que* g *est une densité de probabilité)* Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. On dit alors que Y suit la loi de Laplace de paramètre 0, notée $\mathcal{L}(0)$.

1. Déterminer la fonction de répartition G de Y.
2. Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
3. Montrer que l'équation $G(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution que l'on déterminera.
4. Établir que la fonction $x \mapsto G(x)(1 - G(x))$ est paire.
5. (a) Montrer que l'application réciproque G^{-1} de G est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

   (b) Écrire une fonction **Python** nommée `Laplace` qui permet de simuler une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{L}(0)$.

Exercice 48 :*(d'après* `HEC 2015`*)*
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$.

1. Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
2. En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T *suit la loi de Gumbel de paramètre* λ.

On suppose maintenant que $\lambda = 1$.

3. Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.
4. On considère le programme **Python** suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-2,2,400)
y = np.exp(-np.exp(-x))
plt.plot(x,y)
plt.plot(y,x)
```

Le réel 0 fait-il partie des nombres contenus dans le tableau créé par la commande : `x = np.linspace(-2,2,400)` ?

5. Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?
6. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?
7. Par une méthode de votre choix, écrire en **Python** les commandes qui permettent de simuler la loi de T.

Exercice 49 : Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}$. On admet que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. Z. On dit alors que cette v.a.r. suit la *loi logistique*.

1. Déterminer une densité de probabilité de Z, notée f.
2. Étudier la parité de f puis en déduire que Z admet une espérance et la déterminer.
3. Soit U une v.a.r. de lui uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la loi de la v.a.r. $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

Exercice 50 : Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$.
On considère la v.a.r. : $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

1. Déterminer la loi de V, son espérance et sa variance.
2. Déterminer une densité de $W = V^2$ et de $Z = \dfrac{1}{V}$.

Exercice 51 : (adapté de `ESSEC 2006 Maths III`)

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note F la fonction de répartition de X. On définit sur $]0,1[$ la fonction Q, appelée fonction quantile de X, par :

$$\forall x \in\ ]0,1[,\ Q(x) = k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } F(k-1) < x \leq F(k).$$

1. Montrer que $Q(U)$ et X suivent la même loi.
2. Application : Simulation de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
   (a) Écrire une fonction `F` de paramètres `k` de et `lambda` qui à tout entier naturel k renvoie la valeur de $F(k)$.
   (b) Justifier le résultat suivant : « pour tout $u \in\ ]0,1[$, $Q(u)$ est égal au plus grand entier k tel que $u > F(k-1)$ ».
   En déduire une fonction `quantile` de paramètres `u` et `lambda` qui renvoie la valeur de $Q(u)$.
   (c) En déduire un programme simulant une réalisation de la variable aléatoire X, la valeur de λ étant entrée au clavier.

Loi normale

Exercice 52 : La taille d'un individu d'une population suit une loi normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 5 cm.

1. Un individu étant choisi au hasard dans la population, on désigne par X sa taille en centimètres. Calculer les probabilités des événements suivants :
   $[X = 175]$ à 1 centimètre près ; $[X < 160]$ et $[|X-171| > 15]$.
2. On choisit au hasard n personnes dans la population et on désigne par Y_n la moyenne de leur taille. On admet que Y_n suit une loi normale. Déterminer un entier n tel que $\mathbb{P}([|Y_n - 171| > 1]) < 0,05$.

Exercice 53 :*(extrait de* ECRICOME 2009*)* Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport. Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0,8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en annexe).
4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.
   (a) On désigne par Y la v.a.r. égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes. Déterminer la loi de Y, donner sans calcul, son espérance et sa variance.
   (b) On définit par Z la v.a.r. discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
   Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leq k \leq 10$.
5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
   (a) le premier jour, il prend le bus.
   (b) si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
   (c) si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.
   On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « Monsieur Thurman prend le bus le jour n ».
   (a) Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} = \left(p - \dfrac{1}{2}\right) p_n + \dfrac{1}{2}$.
   (b) Soit α le réel vérifiant : $\alpha = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)\alpha + \dfrac{1}{2}$.
   Déterminer α en fonction de p, puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(1-\alpha) + \alpha$.
   (c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

Exercice 54 :*(d'après* EDHEC 2007*)* On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux v.a.r. à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\,\mathbb{E}(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])$$
   (b) En déduire que Y suit la même loi que X.
2. (a) Calculer l'espérance de U, puis montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
3. (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que :
   $$\int_0^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(b) Montrer, grace à une intégration par parties, que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A x^4 \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = -A^3 \, \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

(c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

(d) Établir que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

4. (a) Vérifier que $\mathbb{E}(X^2 \, Y^2) = 3$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Cov}(X^2, Y^2)$.
   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.
   Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
   (d) Cet exo a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 55 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+$ la probabilité $\mathbb{P}([a < X < na])$ est-elle maximale ?

Exercice 56 : On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Exprimer en fonction de Φ l'intégrale $\displaystyle\int_2^{2+\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-x^2+4x-2} \, dx$.

Exercice 57 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
2. Calculer l'espérance de Y et sa variance, si elles existent.

Grands classiques

Exercice 58 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*}$. Soit X une v.a. suivant la loi de Pareto de paramètres a et b, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction f définit bien une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X, en précisant à quelles conditions chacune de ces quantités existent.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. On appelle fonction de survie la fonction $S : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$. Préciser S.
5. Calculer, pour tout réel y positif ou nul, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$ puis vérifier que cette quantité tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
6. On pose $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$. Démontrer que Y est une v.a.r. à densité puis montrer qu'elle suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 59 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $Y = \mathrm{e}^X$. *(on dit que Y suit la loi* log-normale*)*
2. Démontrer que Y est à densité puis expliciter une densité de Y.
3. Quelle est l'espérance de Y ?