Table des matières

1 Généralités sur les fonctions de deux variables réelles 2
1.1 Définition et premiers exemples 2
1.2 Graphe d'une fonction de deux variables 3
1.3 Lignes de niveaux d'une fonction de deux variables 4

2 Une brève introduction à la topologie du plan $\mathbb{R}^2$ 5
2.1 Distance euclidienne 5
2.2 Boules 5
2.3 Parties bornées 6
2.4 Parties ouvertes 6
2.5 Parties fermées 6
2.6 Point methodo : représentation graphique d'un ouvert U 7

3 Continuité d'une fonction de deux variables 8
3.1 Définition 8
3.2 Démontrer le caractère continu d'une fonction de deux variables 8
3.2.1 Le cas des fonctions polynomiales 8
3.2.2 Stabilité de la continuité par opérations algébriques 8
3.2.3 Stabilité de la continuité par composition 8

4 Calcul différentiel d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables 9
4.1 Applications partielles 9
4.2 Dérivées partielles d'ordre 1 9
4.2.1 Définitions et premiers exemples 9
4.2.2 Gradient de f en un point 10
4.2.3 Notion de point critique 11
4.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ 11
4.3.1 Définition 11
4.3.2 Le cas des fonctions polynomiales 11
4.3.3 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^1$ par opérations algébriques 11
4.3.4 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^1$ par composition 11
4.4 Développement limité à l'ordre 1 12
4.5 Point methodo : calcul des dérivées partielles d'ordre 1 12
4.6 Point methodo : calcul des points critiques 13

5 Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions de deux variables 15
5.1 Dérivées partielles d'ordre 2 15
5.2 Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ 15
5.2.1 Définition 15
5.2.2 Le cas des fonctions polynomiales 16
5.2.3 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^2$ par opérations algébriques 16

5.2.4 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^2$ par composition 16
5.3 Point methodo : régularité d'une fonction de deux variables 17
5.4 Matrice hessienne 18
5.4.1 Définition 18
5.4.2 Théorème de Schwarz et conséquence 18
5.5 Point methodo : calcul des dérivées partielles d'ordre 2 18

6 Extrema d'une fonction de deux variables réelles **19**
6.1 Définitions 19
6.2 Recherche des extremums locaux d'une fonction de deux variables 20
6.2.1 Condition nécessaire d'extremum local 20
6.2.2 Condition suffisante d'extremum local 21
6.2.3 Point methodo : étude d'un point critique (trouver le signe des valeurs propres de la hessienne) 22
6.2.4 Point methodo : étude d'un point critique dégénéré (avec une valeur propre nulle) 24
6.2.5 Point methodo : étude des extrema locaux de f sur un ouvert U 24
6.2.6 Point methodo : conjecturer l'existence d'un extremum local à l'aide des lignes de niveaux . . . 25
6.3 Recherche des extremum globaux d'une fonction de deux variables 26
6.3.1 Recherche sur un fermé borné 26
6.3.2 Point methodo : montrer qu'un extremum local est en réalité un extremum global 27
6.3.3 Point methodo : montrer que f n'admet pas de maximum/minimum global (astuce hors-programme) 28

Introduction

Objectifs de ce chapitre :

1. Etendre la notion de fonction réelle d'une variable réelle ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) vue en première année à celle d'une fonction réelle de deux variables réelles ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Ces objets permettent de modéliser l'évolution d'une quantité en fonction de deux paramètres.
2. Comprendre ce qu'est un problème de recherche d'*extrema* pour une telle fonction de deux variables.
3. Faire le lien avec la régularité $\mathcal{C}^0$ (sur des fermés) ou $\mathcal{C}^1$ (sur des ouverts) de telles fonctions.
4. Faire le lien avec la régularité $\mathcal{C}^2$ (sur des ouverts) et la réduction des matrices (via la matrice hessienne).

1 Généralités sur les fonctions de deux variables réelles

1.1 Définition et premiers exemples

Definition 1. On appelle *fonction de deux variables* (réelles) toute application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

qui à tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe un **réel** $f(x,y)$.

Remarque 1. Pour l'instant, nous ne considérons que des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier pour simplifier la présentation, mais plus tard nous étudierons des fonctions de deux variables définies sur une *partie* de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1. Les fonctions suivantes sont des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$:

- $f : (x,y) \mapsto \frac{2+xy-3x^2y^3}{1+x^2+y^2}$
- $g : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{y^2+xy}$
- $h : (x,y) \mapsto y^3\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
- $c : (x,y) \mapsto y^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

Definition 2. Une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction de deux variables de la forme

$$(x,y) \mapsto \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}x^iy^j$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels et où $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.

Exemple 2.

1. $(x,y) \mapsto x$ (*fonction première coordonnée*)
2. $(x,y) \mapsto y$ (*fonction deuxième coordonnée*)
3. $(x,y) \mapsto xy$ (*fonction produit*)
4. $(x,y) \mapsto x+y$ (*fonction somme*)
5. $(x,y) \mapsto x^2+y^2$
6. $(x,y) \mapsto x^2y$
7. $(x,y) \mapsto xy+y^3+x^3y^5$
8. $(x,y) \mapsto 2y+3xy^7+x^2y-x^2y^3$

Proposition 1. *L'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ est stable par somme, par produit et par multiplication par un scalaire.*

Exemple 3.

1. $(x,y) \mapsto (x-y)(x^2+3yx^3+x^5y^5-7y^4)$
2. $(x,y) \mapsto x^2+y^2(3x+4yx^4-5y)+(x+y)^4(3x-5y)^3$

1.2 Graphe d'une fonction de deux variables

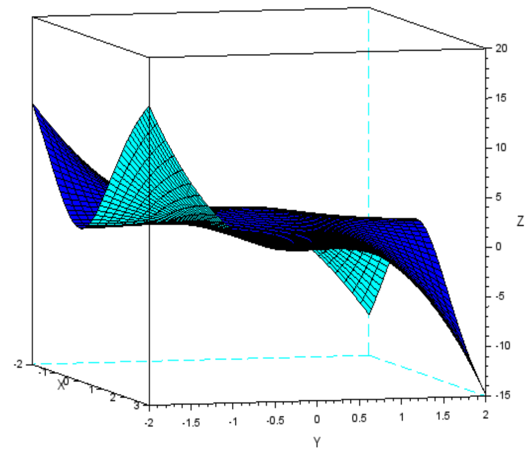
Definition 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\mathscr{C}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

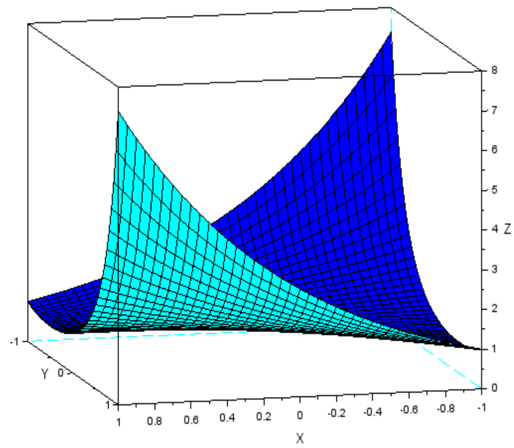
Il s'agit d'une surface (objet de dimension 2) plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ à 3 dimensions.

Remarque 2. On peut interpréter les coordonnées x et y d'un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme la latitude et la longitude et $z = f(x, y)$ comme l'altitude de ce point. Avec cette interprétation, à chaque fonction de deux variables correspond un « paysage » avec ses vallées, ses cols de montagnes et ses sommets.

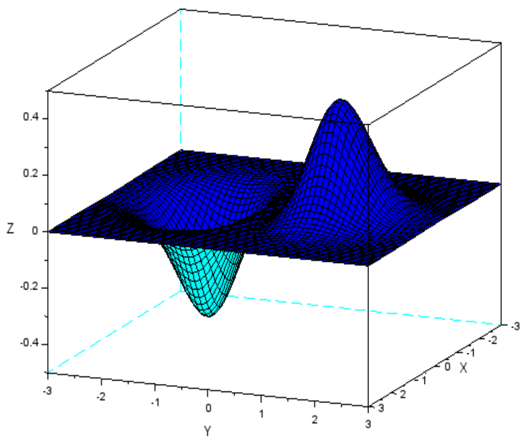
Graphe de $f : (x, y) \mapsto \frac{2+xy-3x^2y^3}{1+x^2+y^2}$



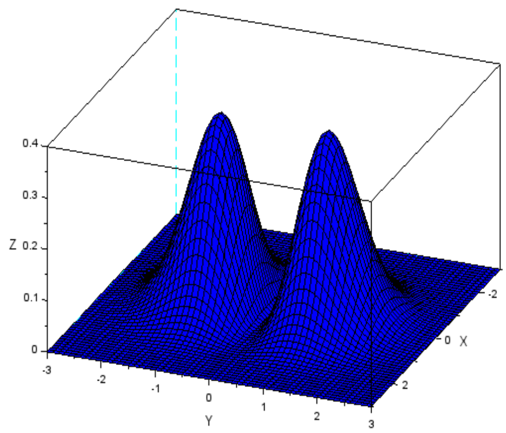
Graphe de $g : (x, y) \mapsto e^{y^2+xy}$



Graphe de $h : (x, y) \mapsto y^3e^{-x^2-y^2}$



Graphe de $c : (x, y) \mapsto y^2e^{-x^2-y^2}$



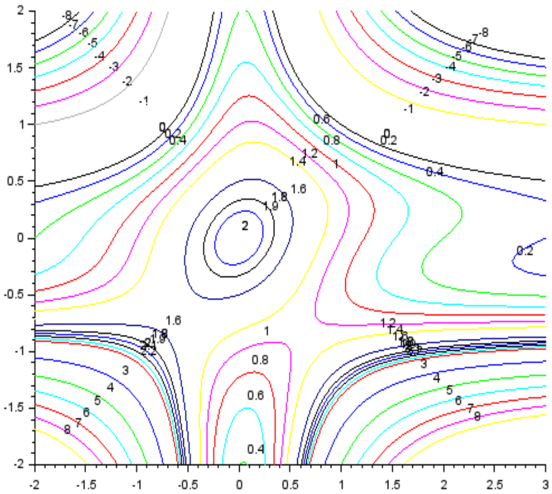
1.3 Lignes de niveaux d'une fonction de deux variables

Definition 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *ligne de niveau* λ de f l'ensemble

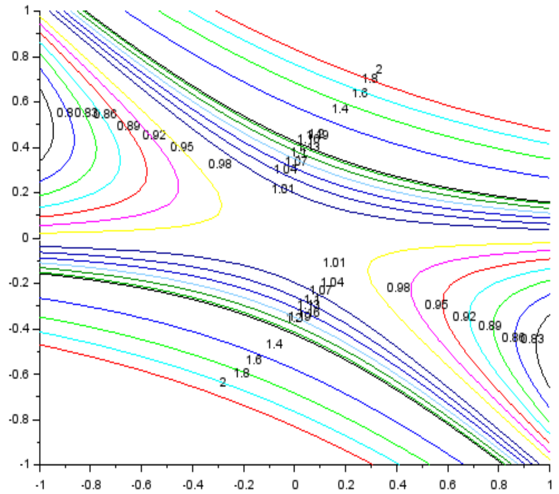
$$L_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = \lambda\}$$

Remarque 3. Si f est la fonction qui à la longitude et à la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude. Si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte pas et on ne descend pas : on reste au même niveau.

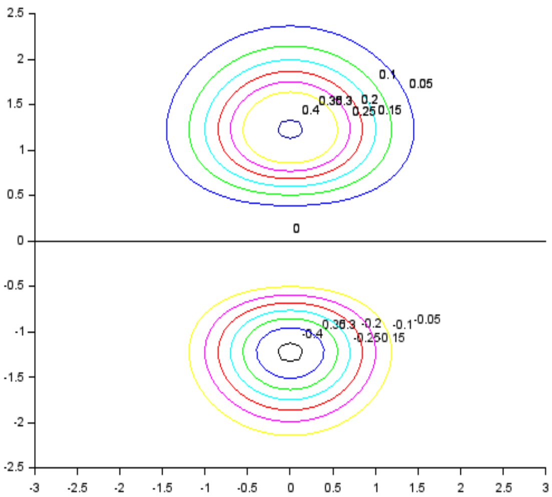
Lignes de niveau de $f : (x, y) \mapsto \frac{2+xy-3x^2y^3}{1+x^2+y^2}$



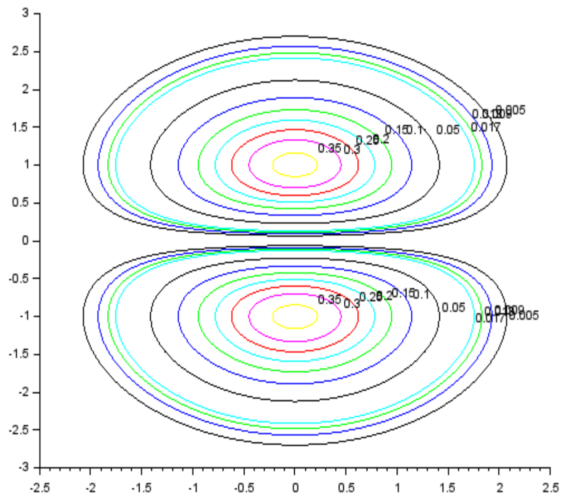
Lignes de niveau de $g : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{y^2+xy}$



Lignes de niveau de $h : (x, y) \mapsto y^3\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$



Lignes de niveau de $c : (x, y) \mapsto y^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$



La lecture des lignes de niveau ou du graphe permet de conjecturer des propriétés de la fonction (extremum local ou point selle). Nous reviendrons sur ces notions en fin de chapitre. Les énoncés de concours comportent parfois de tels dessins à interpréter.

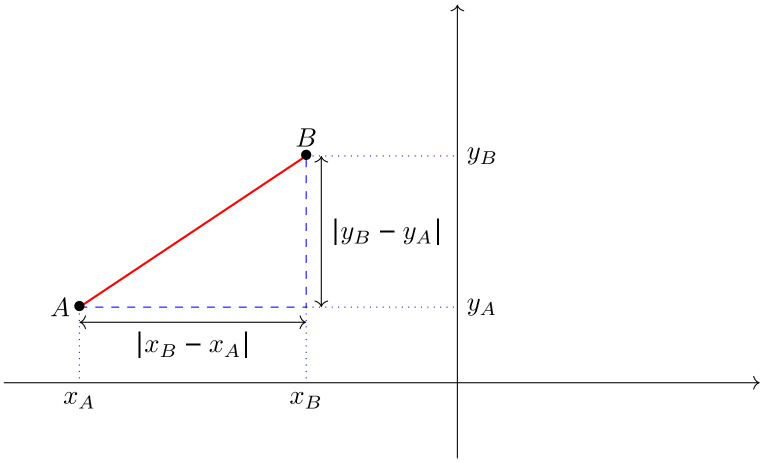
2 Une brève introduction à la topologie du plan $\mathbb{R}^2$

Le but de cette partie est d'introduire quelques mots de vocabulaire (parties *bornées*, *ouvertes*, *fermées*) qu'il faudra savoir manier pour citer les hypothèses des grands théorèmes sur les fonctions de deux variables. Ces notions sont liées à la possibilité de mesurer la distance entre deux points du plan. Il ne sera jamais demandé de *démontrer* qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ possède l'une de ces propriétés. L'énoncé doit fournir ce résultat.

2.1 Distance euclidienne

Definition 5. Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$. On appelle *distance euclidienne* entre A et B, la quantité notée $\mathrm{d}(A, B)$ définie par :

$$\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}\big((x_A, y_A), (x_B, y_B)\big) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



Remarque 4. Si $O = (0, 0)$ est l'origine du plan, et $M = (x, y)$ est un point du plan, alors la distance de M à l'origine est donnée par $\mathrm{d}(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Théoreme 2 (Propriétés de la distance euclidienne (pour la culture))**.**

1. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) \geq 0$ *(positivité)*
2. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$ *(symétrie)*
3. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) = 0 \iff A = B$ *(séparation)*
4. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathrm{d}(A, B) \leq \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, A)$ *(inégalité triangulaire)*

2.2 Boules

Definition 6. Soit A un point du plan $\mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

1. On appelle *boule ouverte* de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B(A, r)$ et défini par :

$$B(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(A, M) < r\}$$

2. On appelle *boule fermée* de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(A, r)$ et défini par :

$$B_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(A, M) \leqslant r\}$$

Remarque 5. Les boules (ouvertes ou fermées) de centre A et de rayon $r > 0$ (aussi petit soit-il) sont des voisinages de A : elles contiennent tous les points à proximité de A.

Remarque 6. Il est inutile de retenir ces notations, elles ne servent qu'à définir les notions qui suivent.

2.3 Parties bornées

Definition 7. Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite *bornée* si il existe $r \geq 0$ tel que $D \subset B(O,r)$. Autrement dit, D est bornée si :

$$\exists r > 0,\ \forall M \in D,\ \mathrm{d}(O,M) < r$$

Proposition 3.

1. *Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée.*
2. *Toute partie incluse dans une boule est une partie bornée.*

Remarque 7. On retiendra l'intuition suivante : les points d'une partie bornée ne peuvent pas être arbitrairement loin les uns des autres. Ou encore : il n'y a pas de suite de points qui s'échappe à l'infini.

2.4 Parties ouvertes

Definition 8. On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un *ouvert* si :

$$\forall M \in D,\ \exists r > 0,\ B(M,r) \subset D$$

Proposition 4. *Toute boule ouverte est un ouvert.*

A retenir.

$\boxed{\text{Un ouvert est une partie de } \mathbb{R}^2 \text{ définie à l'aide d'inégalités strictes. Un ouvert « n'a pas de bord ».}}$

Exemple 4.

1. $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}$ est un ouvert.
2. $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ est un ouvert.
3. $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1\}$ est un ouvert.
4. $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leqslant 1\}$ n'est pas un ouvert.
5. $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ est un ouvert.

2.5 Parties fermées

Definition 9. Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite *fermée* si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Proposition 5. *Toute boule fermée est un fermé. Le plan* $\mathbb{R}^2$ *est à la fois ouvert et fermé.*

A retenir.

$\boxed{\text{Un fermé est une partie de } \mathbb{R}^2 \text{ définie à l'aide d'inégalités larges. Un fermé « possède un bord ».}}$

Exemple 5.

1. $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant 0\}$ est un fermé.
2. $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$ est un fermé.
3. $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ est un fermé.
4. $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leqslant 1\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
5. $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ est un fermé.

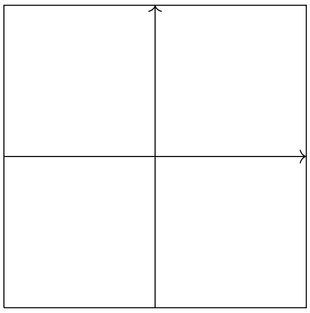
Remarque 8. Aux concours, on ne demandera pas de démontrer qu'une partie est ouverte / fermée. L'énoncé devra donner cette information.

2.6 Point methodo : représentation graphique d'un ouvert U

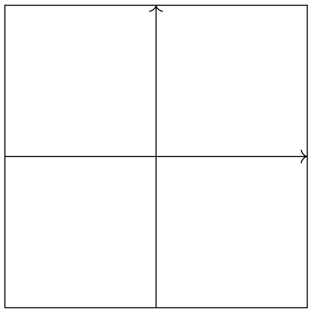
Méthode. Pour représenter graphiquement un ouvert U, on trace un repère du plan $\mathbb{R}^2$ et on hachure la partie du plan contenant les points de U en utilisant une couleur différente de celle de ses bords.

Exemple 6. Représenter graphiquement les ouverts U suivants.

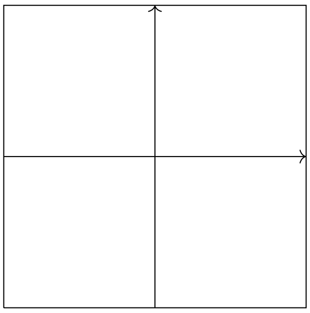
- $U = \mathbb{R}^2$:



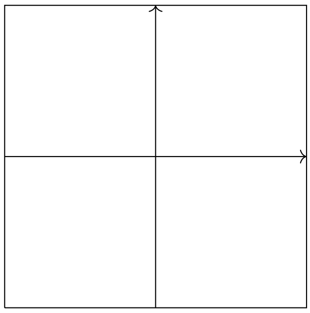
- $U =]0, +\infty[^2$:



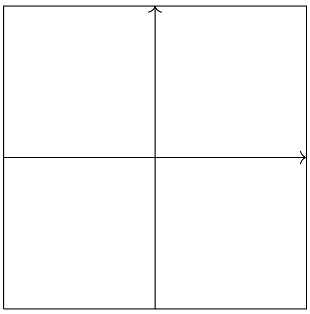
- $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$:



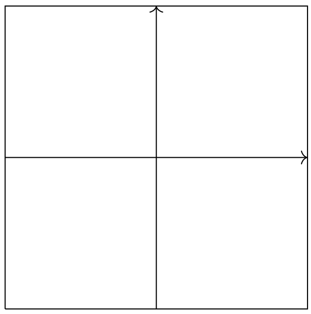
- $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$:



- $U =]1, +\infty[\times]0, +\infty[$:



- $U = \mathbb{R} \times]1, +\infty[$:



3 Continuité d'une fonction de deux variables

A partir de maintenant, on s'autorise à considérer des fonctions de deux variables qui ne sont définies que sur une *partie* de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Définition

Definition 10. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.

1. On dit que f est *continue en* (x_0, y_0) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in D,\ \mathrm{d}((x, y), (x_0, y_0)) < r \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

2. On dit que f est *continue sur* D si f est continue en tout point de D.

3.2 Démontrer le caractère continu d'une fonction de deux variables

En pratique, on n'utilise jamais la définition quantifiée pour montrer la continuité d'une fonction de deux variables. Comme pour les fonctions d'une variable, on fait une décomposition en fonctions usuelles qui elles sont continues d'après le cours.

3.2.1 Le cas des fonctions polynomiales

Théoreme 6. *Toute fonction polynomiale est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Corollaire 7. *En particulier, les fonctions coordonnées* $(x, y) \mapsto x$ *et* $(x, y) \mapsto y$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$.

3.2.2 Stabilité de la continuité par opérations algébriques

Théoreme 8. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f_1 et f_2 sont continues sur D. Alors,*

- *Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est continue sur D.*
- *La fonction $f_1 \times f_2$ est continue sur D.*
- *Si on sait de plus que la fonction f_2 ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est continue sur D.*

Autrement dit, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !) de fonctions continues sur D sont des fonctions continues sur D.

Exemple 7. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3.2.3 Stabilité de la continuité par composition

Théoreme 9. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g : D \to \mathbb{R}$. Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

- *ψ est continue sur I,*
- *g est continue sur D et g est à valeurs dans I (autrement dit : $g(D) \subset I$).*

Alors la composée $f = \psi \circ g$ (qui est une fonction de deux variables) est continue sur D.

Exemple 8.

1. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}$.

4 Calcul différentiel d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables

4.1 Applications partielles

Definition 11. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$. On appelle *applications partielles* de f au point (x_0, y_0) les deux fonctions obtenues à partir de f en **fixant** l'une ou l'autre des variables. Plus précisément, les deux applications partielles de f au point (x_0, y_0) sont les fonctions

$$x \mapsto f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(x_0, y)$$

Remarque 9. Les applications partielles sont des fonctions réelles d'une variable réelle (éventuellement seulement définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et pas sur $\mathbb{R}$ tout entier).

4.2 Dérivées partielles d'ordre 1

4.2.1 Définitions et premiers exemples

Definition 12. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.

- Notons $\gamma_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ l'application partielle de f par rapport à la première variable au point (x_0, y_0). On dit que f admet *une dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à la première variable en* (x_0, y_0) si l'application partielle γ_1 est dérivable en x_0. On note alors $\partial_1(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée :

$$\partial_1(f)(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \gamma_1'(x_0)$$

- Notons $\gamma_2 : y \mapsto f(x_0, y)$ l'application partielle de f par rapport à la deuxième variable au point (x_0, y_0). On dit que f admet *une dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à la deuxième variable en* (x_0, y_0) si l'application partielle γ_2 est dérivable en x_0. On note alors $\partial_2(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée :

$$\partial_2(f)(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \gamma_2'(y_0)$$

Remarque 10. Pour calculer $\partial_1(f)(x,y)$, on fixe mentalement la variable y (on la traite comme une constante) et on dérive l'expression de $f(x,y)$ par rapport à la variable x, comme s'il s'agissait d'une fonction d'une seule variable.

Pour calculer $\partial_2(f)(x,y)$, on fixe mentalement la variable x (on la traite comme une constante) et on dérive l'expression de $f(x,y)$ par rapport à la variable y, comme s'il s'agissait d'une fonction d'une seule variable.

Remarque 11. La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle d'une seule variable réelle. L'ensemble des résultats du chapitre dérivation de première année peut donc être utilisé sur les applications partielles. Par exemple, si f et g admettent une dérivée partielle selon x alors $f+g$ et $f\times g$ aussi (...)

Exemple 9. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Calculer $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$ dans chacun des cas suivants.

1. $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$
2. $f:(x,y)\mapsto 3x^2y^5$
3. $f:(x,y)\mapsto x^2+xy^2$
4. $f:(x,y)\mapsto xy\mathrm{e}^{-y^2}$

Definition 13. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f:D\to\mathbb{R}$.

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable (resp. deuxième variable) sur D si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable (resp. deuxième variable) en tout point de D.
- Si c'est le cas, alors
  — La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la première variable est une fonction réelle de deux variables réelles, notée $\partial_1(f)$:
  $$\partial_1(f):\left|\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \partial_1(f)(x,y)\end{array}\right.$$
  — La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la deuxième variable est une fonction réelle à deux variables réelles, notée $\partial_2(f)$:
  $$\partial_2(f):\left|\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \partial_2(f)(x,y)\end{array}\right.$$

Remarque 12. Dans certains ouvrages plus anciens, on croise les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (à la place de $\partial_1(f)$) et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (à la place de $\partial_2(f)$). L'inconvénient de ces notations est la confusion possible entre le x du ∂x (on dérive par rapport à la variable x) et l'abscisse x du point (x,y). De plus, x étant une variable muette, on ne souhaite pas y faire référence. Il **ne faut pas** utiliser ces notations.

4.2.2 Gradient de f en un point

Definition 14. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f:D\to\mathbb{R}$.

- Soit $(x,y)\in D$. Si les deux dérivées partielles de f existent au point (x,y), alors on appelle *gradient* de f au point (x,y), et on note $\nabla(f)(x,y)$, le vecteur colonne
$$\nabla(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_1(f)(x,y)\\ \partial_2(f)(x,y)\end{pmatrix}$$
- Si f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables sur D, alors on appelle *gradient* de f, et on note $\nabla(f)$, la fonction de deux variables (à valeurs vectorielles) suivante :
$$\nabla(f):\left|\begin{array}{ccc} D & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & \nabla(f)(x,y)\end{array}\right.$$

4.2.3 Notion de point critique

Definition 15. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$. On dit que (x_0, y_0) est un *point critique* de f si :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$

Autrement dit, (x_0, y_0) est un point critique de f si le système (a priori non linéaire) suivant est vérifié :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x_0, y_0) &= 0 \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) &= 0 \end{cases}$$

Exemple 10. On considère $f : (x, y) \mapsto y\mathrm{e}^{-x^2-y}$. Montrer que $(0, 1)$ est l'unique point critique de f.

4.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$

4.3.1 Définition

Definition 16. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur D si les deux dérivées partielles de f existent et sont continues sur D.

Théoreme 10. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D alors f est continue sur D.*

4.3.2 Le cas des fonctions polynomiales

Théoreme 11. *Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

Corollaire 12. *En particulier, les fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

4.3.3 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^1$ par opérations algébriques

Théoreme 13. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*

- *Alors, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la partie D.*
- *La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*
- *Si on sait de plus que la fonction f_2 ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*

Autrement dit, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

4.3.4 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^1$ par composition

Théoreme 14. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel. Soit $g : D \to \mathbb{R}$. Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

- *ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,*
- *g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et g est à valeurs dans I (autrement dit : $g(D) \subset I$).*

Alors la composée $f = \psi \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Remarque 13. Les arguments sont donc les même que pour démontrer la continuité. Il suffit de remplacer « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ ».

Remarque 14. Aux concours, lorsqu'il est demandé de déterminer les dérivées partielles d'une fonction f, il faut `TOUJOURS` commencer par démontrer qu'elle admet des dérivées partielles. Pour ce faire, on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (qui peut le plus peut le moins).

4.4 Développement limité à l'ordre 1

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, on peut vouloir donner des approximations polynomiales locales des fonctions de deux variables, via la notion de développement limité. Le résultat suivant fait office de définition et de théorème.

Théoreme 15 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Alors f admet un* développement limité d'ordre 1 *en tout point $(x_0, y_0) \in U$. Ce développement limité est unique. Plus précisément, (x_0, y_0) étant fixé, il existe une fonction de deux variables ε qui est continue en $(0,0)$ et qui vérifie $\varepsilon(0,0) = 0$, telle que, pour tout (h,k) « proche » de $(0,0)$, on a*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

Remarque 15. Cette formule est analogue à celle pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$$

4.5 Point methodo : calcul des dérivées partielles d'ordre 1

Méthode. Tout calcul de dérivées partielles d'ordre 1 doit être précédé de la justification de leur existence. On écrira :

« La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U donc f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U »

- Pour calculer $\partial_1(f)(x,y)$, on imagine que y est une ______________ et on dérive l'expression de $f(x,y)$ par rapport à la variable ______, comme s'il s'agissait d'une fonction ________________________.
- Pour calculer $\partial_2(f)(x,y)$, on imagine que x est une ______________ et on dérive l'expression de $f(x,y)$ par rapport à la variable ______, comme s'il s'agissait d'une fonction ________________________.

Exemple 11.

1. `(EDHEC 2021)` Soit $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
   - $\partial_1(f)(x,y) =$
   - $\partial_2(f)(x,y) =$
2. `(EML 2020)` Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$.
   - $\partial_1(f)(x,y) =$
   - $\partial_2(f)(x,y) =$
3. `(EML 2014)` Soit $f : (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
   - $\partial_1(f)(x,y) =$
   - $\partial_2(f)(x,y) =$
4. `(ECRICOME 2019)` Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
   - $\partial_1(f)(x,y) =$
   - $\partial_2(f)(x,y) =$

4.6 Point methodo : calcul des points critiques

Méthode. Le début de la rédaction est toujours identique : on raisonne par ________________ et on fait apparaître le système à résoudre, ________________ x et y. Soit $(x, y) \in U$.

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x,y) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \cdots \end{aligned}$$

- Si le système $\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x,y) &= 0 \end{cases}$ est un système **linéaire** (de deux équations à deux inconnues), on doit utiliser l'algorithme du ____________________. C'est malheureusement rarement le cas aux concours.
- La méthode la plus courante pour résoudre un système **non linéaire** consiste à
  × exprimer l'une des deux variables en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations du système (par exemple y en fonction de x : $y = h(x)$)
  × injecter l'expression de cette variable dans l'autre équation afin d'obtenir une équation à une seule inconnue (on remplace y par $h(x)$ dans l'autre équation)

  Plus formellement, le calcul se présente sous la forme

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= 0 \\ y &= h(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,h(x)) &= 0 \\ y &= h(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(x) &= 0 \\ y &= h(x) \end{cases}$$

  La première équation du dernier système étant une équation à une seule ______________, on a découplé le système (y dépend de x mais x ne dépend plus de y). Pour finir le calcul et trouver les solutions du système, il faut d'abord résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ (si l'équation est délicate, elle aura fait l'objet d'une étude dans les questions précédentes). On obtient plusieurs solutions pour x : x_1, x_2,…, x_n. Les points critiques de f sont dans ce cas les points $(x_1, h(x_1))$, $(x_2, h(x_2))$, …, $(x_n, h(x_n))$. En général, aux concours, on trouve entre 1 et 3 points critiques.
- Parfois, il est trop difficile d'exprimer l'une des deux variables en fonction de l'autre par de simples manipulations. On essaye alors de faire apparaître une équation de la forme

$$g(x) = g(y)$$

  où g est une fonction suffisamment « simple » pour que l'on sache résoudre cette équation.
  × Exemple 1 : si g est injective, alors $g(x) = g(y) \iff x = y$ (et alors on a l'expression d'une variable en fonction de l'autre et on est ramené au cas précédent).
  × Exemple 2 : si $g : x \mapsto x^2$, alors $g(x) = g(y) \iff x^2 = y^2 \iff x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$. On a alors deux cas à séparer et, dans chaque cas, on peut utiliser la méthode précédente.

Exemple 12.

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. Montrer que f admet exactement deux points critiques : les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

2. Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$ définie sur $U =]0,+\infty[^2$. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \varphi(x) & = 0 \\ y & = x^2 \end{cases}$$

où φ est une fonction que l'on précisera.

3. Soit $f : (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = e^{\frac{1}{x}} \\ x > 0 \end{cases}$$

où φ est une fonction que l'on précisera.

4. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f admet exactement un point critique : le point $(1, 1)$.

5 Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions de deux variables

5.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Definition 17. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que f possède une *dérivée partielle d'ordre* 2 *par rapport à la première variable* si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable. Dans ce cas, on note
$$\partial^2_{11}(f) = \partial_1(\partial_1(f))$$
- On dit que f possède une *dérivée partielle d'ordre* 2 *par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable* si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable. Dans ce cas, on note
$$\partial^2_{21}(f) = \partial_2(\partial_1(f))$$
- On dit que f possède une *dérivée partielle d'ordre* 2 *par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable* si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable. Dans ce cas, on note
$$\partial^2_{12}(f) = \partial_1(\partial_2(f))$$
- On dit que f possède une *dérivée partielle d'ordre* 2 *par rapport à la seconde variable* si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable. Dans ce cas, on note
$$\partial^2_{22}(f) = \partial_2(\partial_2(f))$$

5.2 Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$

5.2.1 Définition

Definition 18. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* D si les quatre dérivées partielles d'ordre 2 de f existent et sont continues sur D.

Théoreme 16. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*

5.2.2 Le cas des fonctions polynomiales

Théoreme 17. *Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

Corollaire 18. *En particulier, les fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

5.2.3 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^2$ par opérations algébriques

Théoreme 19. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. Alors,*

1. *Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur la partie D.*
2. *La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.*
3. *Si on sait de plus que la fonction f_2 ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.*

Autrement dit, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

5.2.4 Stabilité du caractère $\mathcal{C}^2$ par composition

Théoreme 20. *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit I un intervalle réel. Soit $g : D \to \mathbb{R}$ définie sur D. Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

- *ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I,*
- *g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et g est à valeurs dans I (autrement dit : $g(D) \subset I$).*

Alors la composée $f = \psi \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Exemple 13. Soit $f : (x, y) \mapsto (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ définie sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et les déterminer.

5.3 Point methodo : régularité d'une fonction de deux variables

Méthode. En général, dans les énoncés de concours, il est directement demandé de démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition. C'est pertinent car c'est la régularité maximale au programme : celle qui entraîne toutes les autres. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$, il faut ________________ la fonction f en fonctions ____________. On fera apparaître précisément les _______________ élémentaires $+$, $\times$ et $\circ$.

Exemple 14.

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car _________________.

   A retenir. Il serait très maladroit ici de justifier le caractère $\mathcal{C}^2$ de f en décomposant f comme somme et/ou produit de fonctions polynomiales. En effet, toute somme de fonctions polynomiales et tout produit de fonctions polynomiales est une fonction polynomiale. Il faut donc rester très simple sur cet exemple.

2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car _________________.
3. Soit $f : (x, y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est de la forme $f =$ _______________ où
   - $g_1 : (x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car _________________.
   - $g_2 : (x, y) \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car de la forme $g_2 =$ ___________ où
     - $\times$ $\varphi_2 : z \mapsto e^z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
     - $\times$ $h_2 : (x, y) \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car _________________. (De plus, h_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}$.)
   - $g_3 : (x, y) \mapsto \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car de la forme $g_3 =$ ___________ où
     - $\times$ $\varphi_3 : z \mapsto \ln(z)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
     - $\times$ $h_3 : (x, y) \mapsto y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car _________________. De plus, h_3 est à valeurs dans $]0, +\infty[$.

   A retenir. Lors de la justification de la régularité de f, on a utilisé la stabilité par composition. On a alors introduit les fonctions $g_2 : (x, y) \mapsto e^x$ et $g_3 : (x, y) \mapsto \ln(y)$ qui sont des fonctions de deux variables et dont l'expression ne ____________ que d'une seule variable. Il ne faut pas pour autant les confondre avec les fonctions _________________________ $G_2 : x \mapsto e^x$ et $G_3 : y \mapsto \ln(y)$.

   Une fonction ne se réduit pas à son expression, son ensemble de définition est important

   Les fonctions g_2 et g_3 sont définies sur U, tout comme f. Ce n'est pas le cas des fonctions G_2 et G_3.

4. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est de la forme $f =$ _______________ où
   - $g_1 : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme _____________ de deux fonctions _________________ dont le dénominateur ____________________ sur U.
   - $g_2 : (x, y) \mapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car _________________.
   - $g_3 : (x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme _____________ de deux fonctions _________________ dont le dénominateur ____________________ sur U.

   A retenir. Comme dans l'exemple précédent, il aurait été faux de remplacer g_2 par $G_2 : y \mapsto y^2$ et g_3 par $G_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$. Une fonction de deux variables ne peut pas être égale à une somme de fonctions d'une seule variable. Cela constituerait une erreur de type d'objets.

5.4 Matrice hessienne

5.4.1 Définition

Definition 19. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D. On appelle matrice *hessienne* de f en (x, y) la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2(f)(x, y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x,y) & \partial^2_{12}(f)(x,y) \\ \partial^2_{21}(f)(x,y) & \partial^2_{22}(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

5.4.2 Théorème de Schwarz et conséquence

Théoreme 21 (Théorème de Schwarz)**.** *Soit U un* ouvert *de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Alors :*

$$\forall (x,y) \in U, \quad \partial^2_{12}(f)(x,y) = \partial^2_{21}(f)(x,y)$$

Théoreme 22. *Soit U un* ouvert *de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Alors, pour tout $(x, y) \in U$, la matrice hessienne de f en (x, y) est symétrique et donc diagonalisable.*

5.5 Point methodo : calcul des dérivées partielles d'ordre 2

Méthode. Tout calcul de dérivées partielles d'ordre 2 doit être précédé de la justification de leur existence. On écrira :

« La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur U »

Le plus simple est de calculer les dérivées partielles d'ordre 2 par paire, en appliquant le même procédé que pour les dérivées partielles d'ordre 1 :

- On commence par calculer les dérivées partielles de $\partial_1(f)$:
  - × Pour calculer $\partial^2_{1,1}(f)(x, y)$, on imagine que y est une ______________ et on dérive l'expression de $\partial_1(f)(x, y)$ par rapport à la variable ______, comme s'il s'agissait d'une fonction ____________________________.
  - × Pour calculer $\partial^2_{2,1}(f)(x, y)$, on imagine que x est une ______________ et on dérive l'expression de $\partial_1(f)(x, y)$ par rapport à la variable ______, comme s'il s'agissait d'une fonction ____________________________.

  On obtient à ce stade la ______________ colonne de la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$.
- On calcule ensuite les dérivées partielles de $\partial_2(f)$:
  - × Pour calculer $\partial^2_{1,2}(f)(x, y)$, on imagine que y est une ______________ et on dérive l'expression de $\partial_2(f)(x, y)$ par rapport à la variable ______, comme s'il s'agissait d'une fonction ____________________________.
  - × Pour calculer $\partial^2_{2,2}(f)(x, y)$, on imagine que x est une ______________ et on dérive l'expression de $\partial_2(f)(x, y)$ par rapport à la variable ______, comme s'il s'agissait d'une fonction ____________________________.

  On obtient alors la ______________ colonne de la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$.

A la fin des calculs, on vérifie que l'on a bien l'égalité ________________________________ en vertu du théorème de Schwarz. Si ce n'est pas le cas, on a forcément fait une erreur et il faut reprendre les calculs.

Exemple 15.

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

- $\partial^2_{1,1}(f)(x, y) =$
- $\partial^2_{1,2}(f)(x, y) =$
- $\partial^2_{2,1}(f)(x, y) =$
- $\partial^2_{2,2}(f)(x, y) =$

2. Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$.
   - $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{2,1}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) =$
3. Soit $f : (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$.
   - $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{2,1}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) =$
4. Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$.
   - $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{2,1}(f)(x,y) =$
   - $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) =$

6 Extrema d'une fonction de deux variables réelles

6.1 Définitions

Definition 20 (Extremum local)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0,y_0) \in U$.

- On dit que f admet un *maximum local* en (x_0,y_0) si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),r),\ f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)}$$

- On dit que f admet un *minimum local* en (x_0,y_0) si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),r),\ f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)}$$

- On dit que f admet un *extremum local* en (x_0,y_0) si f admet un maximum local ou un minimum local en (x_0,y_0).

Remarque 16. Dire que f admet un maximum local en (x_0,y_0), c'est dire que l'altitude maximale au voisinage du point de coordonnées (x_0,y_0) est $f(x_0,y_0)$. Il y a donc un « sommet de montagne » au point de coordonnées (x_0,y_0). L'adjectif « local » laisse exister la possibilité qu'il y ait un autre sommet un peu plus loin, encore plus haut que celui découvert au point de coordonnées (x_0,y_0).

Definition 21 (Extremum global)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0,y_0) \in U$.

- On dit que f admet un *maximum global* en (x_0,y_0) si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)}$$

- On dit que f admet un *minimum global* en (x_0,y_0) si :

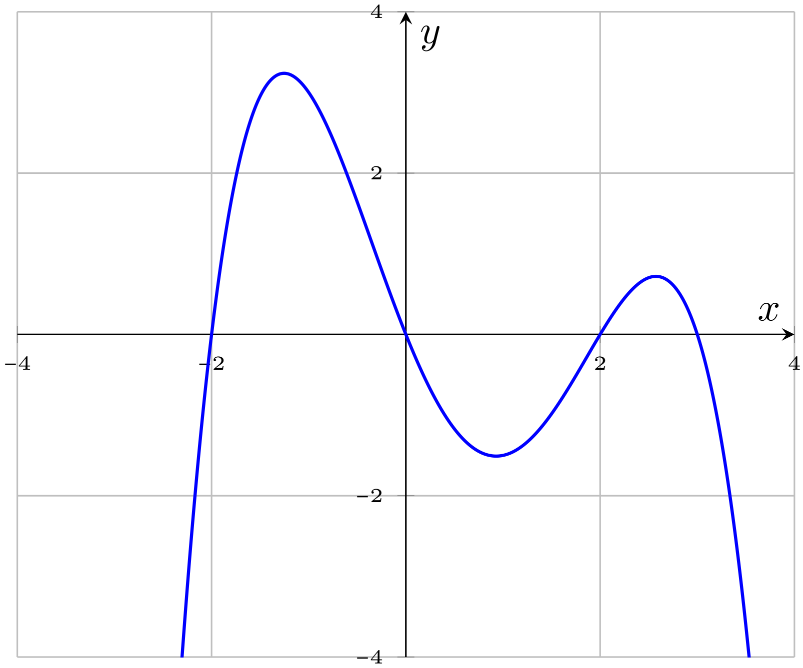
$$\boxed{\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)}$$

- On dit que f admet un *extremum global* en (x_0,y_0) si f admet un maximum global ou un minimum global en (x_0,y_0).

Remarque 17. Dire que f admet un maximum global en (x_0,y_0), c'est dire que l'altitude maximale dans le monde est $f(x_0,y_0)$. Il y a donc, au point de coordonnées (x_0,y_0), le « sommet de montagne » le plus haut du monde. Il peut y avoir d'autres sommets de même altitude un peu plus loin, mais pas de sommet qui grimpe encore plus haut. Dans notre monde, la fonction altitude admet un maximum global au point sous le sommet du mont Everest.

Ces notions d'extrema locaux et globaux ont déjà été étudiées en première année sur les fonctions d'une variable réelle.

Exemple 16. Considérons $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x(x+2)(x-2)(x-3)$. Représenter ses extrema locaux et globaux sur son graphe ci-dessous.



Remarque 18. Un extremum global est nécessairement un extremum local mais la réciproque est fausse.

A retenir.

$\boxed{\text{Les éventuels extremums globaux sont à chercher parmi les extremums locaux.}}$

6.2 Recherche des extremums locaux d'une fonction de deux variables

6.2.1 Condition nécessaire d'extremum local

Théoreme 23. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.*

Remarque 19. Nous avons un résultat analogue pour les fonctions d'une variable réelle : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et si f admet un extremum local en x_0 qui n'est pas au bord de I, alors $f'(x_0) = 0$. Comme pour les fonctions d'une variable réelle, le résultat précédent est une condition **nécessaire** mais **pas suffisante**.

Exemple 17. Vérifions que la condition n'est pas suffisante. Prenons un contre-exemple avec une fonction d'une variable $f : x \mapsto x^3$ définie sur $]-1, 1[$ qui est ouvert. La fonction f vérifie $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0.

Exemple 18. Que se passe-t-il si U n'est pas ouvert ? Prenons un contre-exemple avec une fonction d'une variable $f : x \mapsto x$ définie sur $[0, 1]$. La fonction f admet un maximum global et donc local en 1, mais $f'(1) = 1 \neq 0$. Le théorème est faux si U n'est pas ouvert.

Remarque 20. Nous avons déjà rencontré cette situation, avec la distinction entre valeurs propres et valeurs propres *possibles*. On détermine dans un premier temps les valeurs propres possibles puis on doit vérifier dans un second temps si elles sont bien des valeurs propres ou non. La situation est analogue ici, on doit vérifier si un point critique est un extremum local ou non.

A retenir.

$\boxed{\text{Les éventuels extremums locaux sont à chercher parmi les points critiques.}}$

6.2.2 Condition suffisante d'extremum local

Théoreme 24. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f. Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ (qui est diagonalisable).*

- *Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).*
- *Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).*
- *Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). Dans ce cas, on dira que f admet un* point selle *ou* point col.
- *Si au moins une valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure par cette méthode. Il faudra alors procéder à une étude plus précise, guidée par l'énoncé.*

Exemple 19.

1. Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

2. Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

3. Déterminer puis étudier les points critiques de $f(x, y) = xy$.

6.2.3 Point methodo : étude d'un point critique (trouver le signe des valeurs propres de la hessienne)

Méthode. On considère un point critique (a,b) de f et on se demande si f admet un extremum local en (a,b). La matrice hessienne de f au point (a,b) est notée $\nabla^2(f)(a,b)$. C'est une matrice ________________ donc diagonalisable. Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a,b)$ sont notées λ_1 et λ_2. On sait que le __________ des valeurs propres peut nous renseigner sur la nature du point critique. Il existe deux situations dans les sujets de concours :

- Si la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a,b)$ est complètement explicite (ses coefficients sont numériques), alors on calcule explicitement les ____________________ de cette matrice à l'aide du ________________ :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } \nabla^2(f)(a,b) &\iff \det\left(\nabla^2(f)(a,b) - \lambda I_2\right) = 0 \\ &\iff \dots \\ &\iff P(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

  où $P(X)$ est un polynôme du ___________ degré complètement explicite. On sait donc résoudre la dernière équation, dont les solutions sont les ____________________ de $\nabla^2(f)(a,b)$.

- Si la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a,b)$ dépend d'un _______________, alors le calcul des valeurs propres λ_1 et λ_2 est a priori trop difficile à effectuer. On calcule dans ce cas la ____________ et le ____________ des valeurs propres λ_1 et λ_2 à l'aide
  - × du _________________ de $\nabla^2(f)(a,b) - \lambda I_2$,
  - × et de ___________________ de deux polynômes.

  Plus précisément, le coeur de la méthode réside dans le fait de calculer le polynôme $P(X)$ de deux manières différentes :

  1. On calcule $P(\lambda) = \det\left(\nabla^2(f)(a,b) - \lambda I_2\right)$. En remplaçant λ par X, on obtient une expression de $P(X)$ de la forme
  $$P(X) = X^2 - SX + P$$
  2. En remarquant que λ_1 et λ_2 sont les racines de P, on peut écrire que $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.
  En _________________, on obtient une expression de $P(X)$ de la forme
  $$P(X) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$$

  L'identification des deux polynômes fournit le système

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 &= P \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= S \end{cases}$$

  - × la première équation permet de savoir si λ_1 et λ_2 sont de même signes ou de signes ____________. C'est la première chose à déterminer. Le nombre P est nul ssi l'une des valeurs propres au moins est nulle.
  - × si λ_1 et λ_2 sont de même signes, la deuxième équation permet de savoir si ce signe est ___________ ou ___________.

Exemple 20.

1. Soit $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. On admet que f admet exactement deux points critiques : les points $(0,0)$ et $(1,1)$. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$. On admet que f admet un unique point critique dans $]0, +\infty[^2$, de la forme (u, u^2) où $u \in \mathbb{R}^+$ vérifie $u^3 + u - 1 = 0$. Est-ce que f admet un extremum local au point (u, u^2) ?

3. Soit $f : (x, y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. On admet que f admet un unique point critique et qu'il s'agit du point $(1, \mathrm{e})$. Est-ce que f admet un extremum local au point $(1, \mathrm{e})$?

4. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On admet que f admet un unique point critique et qu'il s'agit du point $(1, 1)$. Montrer que f admet un extremum local au point $(1, 1)$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

6.2.4 Point methodo : étude d'un point critique dégénéré (avec une valeur propre nulle)

Il n'y a pas de méthode au programme, il faut se laisser guider par l'énoncé. En général, on doit calculer des équivalents pour déterminer le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ au voisinage du point critique (x_0, y_0).
Exemple 21. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^4 - yx^2 - xy^2$. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f puis calculer $\nabla(f)(0, 0)$. Calculer $f(x, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que f n'admet pas d'extremum local au point $(0, 0)$.

6.2.5 Point methodo : étude des extrema locaux de f sur un ouvert U

Méthode. On sait que, sur un ouvert, un extremum local est forcément atteint en un __________________. Ainsi, pour savoir si la fonction f admet un extremum local sur U, il suffit d'étudier tous les ____________________ de f dans cet ouvert puis de faire la synthèse des informations obtenues.

A retenir. Si aucun point critique de f dans U n'est un extremum local, alors la fonction f n'admet pas ______________________ dans U.

Exemple 22. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$. Est-ce que f admet un extremum local sur $]0, +\infty[^2$?

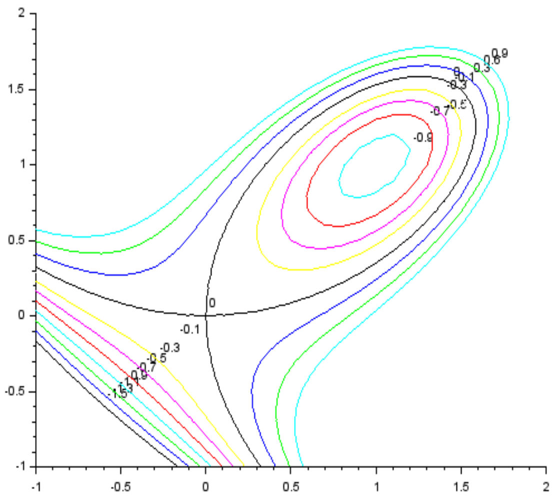
6.2.6 Point methodo : conjecturer l'existence d'un extremum local à l'aide des lignes de niveaux

Méthode. Il peut arriver que l'énoncé contienne un tracé des lignes de niveau de la fonction f. Il s'agit alors d'être capable de conjecturer l'existence ou non d'un extremum local, et si possible de préciser sa nature.

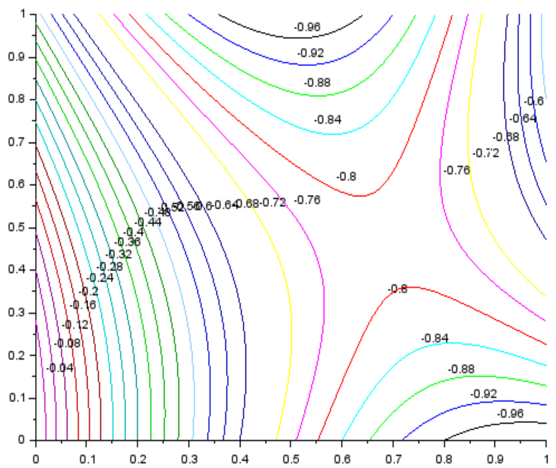
- Si des courbes fermées (comme des cercles déformés ou des boucles) semblent se concentrer autour d'un point, alors ce point est un ______________ local.
  - $\times$ Si la valeur affichée sur les lignes de niveau augmente lorsque l'on se rapproche du point, alors il s'agit d'un ______________ local.
  - $\times$ Si la valeur affichée sur les lignes de niveau diminue lorsque l'on se rapproche du point, alors il s'agit d'un ______________ local.
- Si il n'y a pas de boucle autour du point et que la valeur affichée sur les lignes de niveau peut tout à la fois augmenter et diminuer lorsque l'on se rapproche du point (selon la ______________ choisie pour se rapprocher), alors le point n'est pas un extremum local.

Exemple 23.

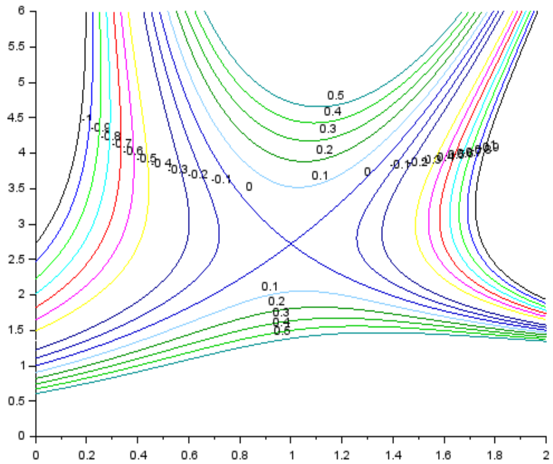
1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. On représente ci-dessous les lignes de niveau de f, sur le domaine $[-1, 2]^2$, en faisant varier le niveau de $-1,5$ à 1. Que peut-on conjecturer ?



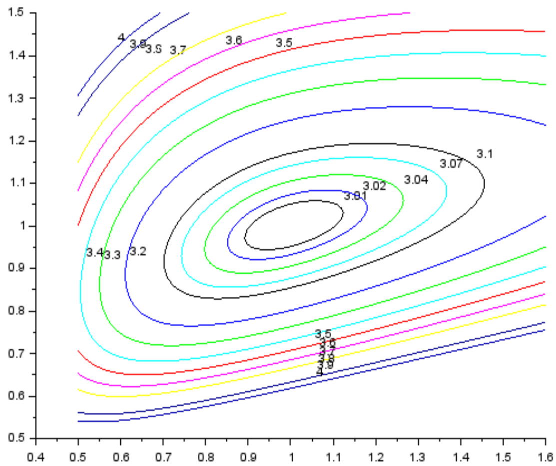
2. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$. On représente ci-dessous les lignes de niveau de f, sur le domaine $[0, 1]^2$, en faisant varier le niveau de -1 à 0. Que peut-on conjecturer ?



3. Soit $f : (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$. On représente ci-dessous les lignes de niveau de f, sur le domaine $[0,2] \times [0,6]$, en faisant varier le niveau de -1 à 2. Que peut-on conjecturer ?



4. Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On représente ci-dessous les lignes de niveau de f, sur le domaine $[0.5,2]^2$, en faisant varier le niveau de 2 à 4. Que peut-on conjecturer ?



6.3 Recherche des extremum globaux d'une fonction de deux variables

6.3.1 Recherche sur un fermé borné

Théoreme 25. *Soit D une partie* ***fermée*** *et* ***bornée*** *de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur D. Alors, f est bornée et atteint ses bornes sur D.*

Autrement dit, si la fonction f est ______________ sur D et si D est une partie ________________________ de $\mathbb{R}^2$, alors f admet un _______________ global et un _______________ global sur D.

6.3.2 Point methodo : montrer qu'un extremum local est en réalité un extremum global

Méthode. On considère un point critique (a,b) de f qui est un extremum local de f. On souhaite montrer qu'il s'agit d'un extremum global. Il n'existe pas de méthode au programme pour cette question. Il faut se laisser guider par l'énoncé, qui va nous demander de démontrer une égalité du type

$$f(x,y) = g(x,y) + f(a,b)$$

ou, pour le dire autrement,

$$f(x,y) - f(a,b) = g(x,y)$$

Il existe essentiellement deux situations.

- Si, pour tout $(x,y) \in U$, $g(x,y) \geqslant 0$, alors on peut conclure que pour tout $(x,y) \in U$, $f(x,y) \geqslant f(a,b)$ et donc (a,b) est un ____________ global. C'est typiquement le cas si $g(x,y)$ est une somme de carrés.
- Si, pour tout $(x,y) \in U$, $g(x,y) \leqslant 0$, alors on peut conclure que pour tout $(x,y) \in U$, $f(x,y) \leqslant f(a,b)$ et donc (a,b) est un ____________ global.

Exemple 24.

1. Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + 1$.
   Développer l'expression $g(x,y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$. Que peut-on en déduire sur le point $(0,0)$?

2. Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + e^{2y} - 2e^{y}$.
   Développer l'expression $g(x,y) = (x + y - 1)^2 + \left(e^{y} - 1\right)^2$. Que peut-on en déduire sur le point $(1,0)$?

6.3.3 Point methodo : montrer que f n'admet pas de maximum/minimum global (astuce hors-programme)

Méthode. On considère un point critique (a,b) de f qui est un extremum local de f. On souhaite montrer qu'il ne s'agit pas d'un extremum global (contrairement à la partie précédente). Il n'existe pas de méthode au programme pour cette question. On retiendra cependant l'idée suivante :

- On calcule une ou plusieurs limites parmi les suivantes (on s'arrête dès qu'on peut) :

  × $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0)$ × $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,1)$ × $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,x)$

  × $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(0,y)$ × $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(1,y)$ × $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,-x)$

- Si l'une de ces limites existe et vaut $+\infty$, on peut conclure que f n'admet pas de ____________ global, puisque elle n'est pas ____________. En particulier, le point critique (a,b) n'est pas un ____________ global.
- Si l'une de ces limites existe et vaut $-\infty$, on peut conclure que f n'admet pas de ____________ global, puisque elle n'est pas ____________.

Exemple 25.

1. Soit $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Donner les limites suivantes lorsqu'elles existent :

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{y\to-\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) =$

   Que peut-on en déduire sur f ?

2. Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$ définie sur $U =]0,+\infty[^2$. Donner les limites suivantes lorsqu'elles existent :

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{y\to-\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) =$

   Que peut-on en déduire sur f ?

3. Soit $f : (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$. Donner les limites suivantes lorsqu'elles existent :

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{y\to-\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) =$

   Que peut-on en déduire sur f ?

4. Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Donner les limites suivantes lorsqu'elles existent :

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) =$
   - $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{y\to-\infty} f(1,y) =$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) =$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) =$

   Que peut-on en déduire sur f ?