On s'intéresse dans ce DM à une modélisation particulière de la durée de vie d'un composant électronique ou électrique (par exemple d'une ampoule ou d'un pixel d'écran).

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit une loi *sans mémoire* si,

- X est à valeurs positives
- pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t + x]) = \mathbb{P}([X > x])$$

(ce qui sous-entend que $\mathbb{P}([X > t]) > 0$ pour que cela ait un sens)

Interprétation de la formule : si le composant a déjà survécu un temps t, la probabilité qu'il survive un temps x supplémentaire est la même qu'au tout début de son utilisation. Tout se passe comme si le composant avait « oublié » qu'il avait déjà vécu un temps t.

De manière analogue, si X est une variable aléatoire discrète à valeurs entières, on dit que X suit une loi *sans mémoire* si,

- X est à valeurs positives
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + j]) = \mathbb{P}([X > j])$$

(ce qui sous-entend que $\mathbb{P}([X > k]) > 0$ pour que cela ait un sens)

1. *Question préliminaire.* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi sans mémoire. Montrer que $\mathbb{P}([X > 0]) = 1$ puis que $\mathbb{P}([X = 0]) = 0$. *On pourra ainsi considérer que $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$ si X suit une loi sans mémoire.*

Démonstration.

- Cas où X est à densité.
  La variable aléatoire X suit une loi sans mémoire donc, en choisissant $t = x = 0$ dans la définition, on a
  $$\mathbb{P}([X > 0]) = \mathbb{P}_{[X>0]}([X > 0]) = 1$$
  Ensuite, comme X est à densité, on a directement
  $$\mathbb{P}([X = 0]) = 0$$
- Cas où X est discrète à valeurs entières.
  La variable aléatoire X suit une loi sans mémoire donc, en choisissant $k = j = 0$ dans la définition, on a
  $$\mathbb{P}([X > 0]) = \mathbb{P}_{[X>0]}([X > 0]) = 1$$
  Ensuite, par définition, X est à valeurs positives et donc $\mathbb{P}([X \geqslant 0]) = 1$. Or, par incompatibilité,
  $$\mathbb{P}([X \geqslant 0]) = \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X > 0])$$
  ce qui donne
  $$\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - 1 = 0$$

□

Partie 1 : Loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 1. *Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :*

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ *où* $p \in]0, 1[$.
- *X est discrète à valeurs entières et X suit une loi sans mémoire.*

2. Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On pose $q = 1 - p$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{+\infty} [X = j]\right) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} && \textit{(car } j \in \mathbb{N}^* \textit{ et } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} pq^{j+k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= pq^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\
&= pq^k \frac{1}{1-q} && \textit{(somme géométrique de raison } q \in]-1,1[\textit{)} \\
&= q^k && \textit{(car } 1 - q = p\textit{)}
\end{aligned}$$

   □

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + j]) = \mathbb{P}([X > j])$$

   Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k > 0$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + j])$ est bien définie.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + j]) &= \frac{\mathbb{P}([X > k + j] \cap [X > j])}{\mathbb{P}([X > k])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X > k + j])}{\mathbb{P}([X > k])} && \textit{(car } j \geqslant 0\textit{)} \\
&= \frac{q^{k+j}}{q^k} && \textit{(car } j \in \mathbb{N} \textit{ et } k + j \in \mathbb{N}\textit{)} \\
&= q^j \\
&= \mathbb{P}([X > j]) && \textit{(car } j \in \mathbb{N}\textit{)}
\end{aligned}$$

   □

   (c) Conclure.

   Démonstration. On sait que X est à valeurs entières positives (loi géométrique) et d'après la question précédente, on peut conclure que X suit une loi sans mémoire. Ainsi, la première propriété implique la deuxième propriété. □

3. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières et qui suit une loi sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}([X > 1])$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}([X > k])$.
   (a) Justifier : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

   Démonstration. D'après la question préliminaire, $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$. De plus, X est à valeurs entières. Il suit que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z} \cap]0, +\infty[= \mathbb{N}^*$. □

   (b) Justifier : $q > 0$.

   Démonstration. Par hypothèse, X suit une loi sans mémoire. Ainsi, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>1]}([X > 1 + j]) = \mathbb{P}([X > j])$ est bien définie (en posant $k = 1$ dans la définition), ce qui implique en particulier que $\mathbb{P}([X > 1]) > 0$. D'où $q > 0$. □

(c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = qu_k$. En déduire une expression simple de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que X suit une loi sans mémoire, donc en choisissant $j = 1$ dans la définition, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+1]) = \mathbb{P}([X > 1])$$

Or,

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+1]) = \frac{\mathbb{P}([X > k+1])}{\mathbb{P}([X > k])}$$

d'où

$$\mathbb{P}([X > k+1]) = \mathbb{P}([X > 1])\mathbb{P}([X > k])$$

ce qui se traduit bien en

$$\boxed{u_{k+1} = qu_k}$$

On en déduit que (u_k) est une suite géométrique et il vient alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 q^k$.
Or, $u_0 = \mathbb{P}([X > 0]) = 1$ d'après la question préliminaire. D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, u_k = q^k}$$

□

(d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X est à valeurs entières donc

$$[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$$

Par incompatibilité, il vient

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

ce qui se traduit en

$$\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k}$$

□

(e) Montrer que $q < 1$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde.

Démonstration. On sait déjà que $q \in]0, 1]$. Supposons que $q = 1$.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = 1$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k = 1 - 1 = 0$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Or, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et donc la famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$$

D'où $0 = 1$. C'est absurde. Donc $\boxed{q < 1}$. □

(f) Conclure.

Démonstration. On a montré que

- $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = k]) &= u_{k-1} - u_k \\
&= q^{k-1} - q^k \\
&= q^{k-1}(1-q) \\
&= pq^{k-1} && \textit{(en posant } p = 1-q)
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ (puisque $q \in]0,1[$). Ainsi, la deuxième propriété implique la première propriété. □

4. De quel nombre l'appel `simul(100000)` donne-t-il une approximation ?

```
def simul(N):
    c = 0
    tirages = 0
    while tirages < N:
        X = rd.geometric(1/2)
        if X > 2:
            tirages = tirages + 1
            if X > 5:
                c = c + 1
    return c / N
```

Démonstration. D'après la loi faible des grands nombres, l'appel `simul(100000)` renvoie une approximation de la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}_{[X>2]}([X > 5])$$

où $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

En effet, dans cette simulation **Python**, on ne retient que les tirages qui réalisent l'événement $[X > 2]$ donc on conditionne l'expérience par cet événement. Ensuite, on effectue exactement N tirages réalisant l'événement $[X > 2]$, et parmi ces tirages, la variable c compte combien de tirages ont réalisé l'événement $[X > 5]$. Le nombre c/N est donc la fréquence empirique de réalisation de cet événement lorsque l'on conditionne par $[X > 2]$.

De plus, d'après ce qui précède, X suit une loi sans mémoire, donc

$$\mathbb{P}_{[X>2]}([X > 5]) = \mathbb{P}([X > 3]) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\boxed{\text{L'appel simul(100000) renvoie une approximation de } \frac{1}{8}.}$ □

Partie 2 : Loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 2. *Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :*

- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ *où* $\lambda > 0$.
- *X suit une loi sans mémoire et X admet une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.*

5. Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) On note f la densité usuelle de X. Rappeler l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Démonstration.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

□

(b) Vérifier que f est nulle sur $]-\infty,0[$, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et continue à droite en 0.

Démonstration. • D'après la formule précédente, f est nulle sur $]-\infty,0[$.

- f coïncide avec $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ sur $]0,+\infty[$ et $\lambda > 0$ donc f est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

□

(c) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > t]) = e^{-\lambda t}$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X > t]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leqslant t]) \\ &= 1 - F_X(t) \\ &= 1 - (1 - e^{\lambda t}) && \textit{(d'après le cours)} \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

□

(d) Conclure.

Démonstration. Tout d'abord, f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$ donc X est à valeurs positives.
Soit $t \geqslant 0$ et soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t + x]) &= \frac{\mathbb{P}([X > t + x] \cap [X > t])}{\mathbb{P}([X > t])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > t + x])}{\mathbb{P}([X > t])} && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} && \textit{(car } t \geqslant 0 \textit{ et } t + x \geqslant 0\textit{)} \\ &= e^{-\lambda x} \\ &= \mathbb{P}([X > x]) && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}\end{aligned}$$

On en déduit que X suit une loi sans mémoire. Ainsi, la première propriété implique la deuxième propriété.

□

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi sans mémoire et admettant une densité f qui est nulle sur $]-\infty,0[$, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et continue à droite en 0. On note $G : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (on appelle G la fonction de *survie* de X). On pose $\lambda = f(0)$.

(a) Donner la valeur de $F_X(x)$ pour $x \leqslant 0$. Rappeler la valeur de $G(0)$.

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$. D'après la question préliminaire, $X(\Omega) \subset]0,+\infty[$. On en déduit que

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

De plus,

$$G(0) = \mathbb{P}([X > 0]) = 1$$

□

(b) Justifier que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \mathbb{P}([X > x]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - F_X(x)$.

- La variable aléatoire X est à densité donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $]0,+\infty[$ donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

□

(c) i. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$G(t+x) = G(t)G(x)$$

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$ et soit $x \geqslant 0$. Puisque X suit une loi sans mémoire, on a

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t+x]) = \mathbb{P}([X > x])$$

Or, $x \geqslant 0$, donc

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t+x]) = \frac{\mathbb{P}([X > t+x])}{\mathbb{P}([X > t])}$$

ce qui se réécrit

$$\frac{G(t+x)}{G(t)} = G(x)$$

d'où

$$\boxed{G(t+x) = G(t)G(x)}$$

□

ii. Montrer que, pour tout $t > 0$ et pour tout $x > 0$,

$$G'(t+x) = G(t)G'(x)$$

Démonstration. Soit $t > 0$. On pose $h_1 : x \mapsto G(t+x)$ et $h_2 : x \mapsto G(t)G(x)$. D'après la question précédente, h_1 et h_2 coïncident sur $[0, +\infty[$. De plus, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc h_1 et h_2 sont dérivables sur $]0, +\infty[$ (on a bien, pour tout $x > 0$, $t + x > 0$).
Ainsi,

$$\forall x > 0, h_1'(x) = h_2'(x)$$

i.e.

$$\boxed{\forall x > 0, G'(t+x) = G(t)G'(x)}$$

□

iii. En déduire que, pour tout $t > 0$,

$$G'(t) = -\lambda G(t)$$

(on fera le lien entre la fonction G' et la fonction f)

Démonstration. Soit $t > 0$ et soit $x > 0$. On sait que

$$G'(t+x) = G(t)G'(x)$$

Or, $G(x) = 1 - F_X(x)$ donc $G'(x) = -F_X'(x) = -f(x)$. D'où

$$G'(t+x) = -f(x)G(t)$$

Or,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lambda$$

car f est continue à droite en 0.
De plus, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc G' est continue sur $]0, +\infty[$ donc

$$\lim_{x \to 0} G'(t+x) = G'(t) \qquad \text{(car } t > 0\text{)}$$

On fait alors un passage à la limite lorsque $x \to 0^+$, on obtient :

$$\boxed{G'(t) = -\lambda G(t)}$$

□

iv. Justifier que $\lambda \geqslant 0$ puis montrer que $\lambda > 0$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde pour la deuxième inégalité.

Démonstration. Tout d'abord, on sait que f est une densité donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. En particulier, $f(0) \geqslant 0$. D'où $\lambda \geqslant 0$.
Supposons que $\lambda = 0$.
Alors, pour tout $t > 0$, $G'(t) = 0$ et donc $-f(t) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur f, à savoir que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Donc $\boxed{\lambda > 0}$. ☐

v. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$, $G(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$, puis déterminer la valeur de C.

Démonstration. La fonction G est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ d'inconnue y. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, homogène et à coefficients constants. On sait alors que les solutions de cette équation différentielle sont toutes de la forme

$$t \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

La fonction G étant l'une de ces solutions, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$, $G(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la continuité de G en 0, on obtient : $G(0) = C$. Or, $G(0) = 1$ donc $\boxed{C = 1}$. ☐

(d) Conclure.

Démonstration. On a montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

car $F_X = 1 - G$.
On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Or, la fonction de répartition caractérise la loi, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ avec } \lambda > 0}$. La deuxième propriété implique la première propriété. ☐

Partie 3 : De la loi exponentielle à la loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 3. *Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.*

7. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.

(a) Déterminer $Z(\Omega)$.

Démonstration. On a $Z = h(X)$ où $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Donc

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= h(X)(\Omega) \\ &= h(X(\Omega)) \\ &= h([0, +\infty[) \\ &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

☐

(b) Calculer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([\lfloor X \rfloor = k]) \\ &= \mathbb{P}([k \leqslant X < k + 1]) \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) && \textit{(car } X \textit{ est à densité)} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda k}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

☐

8. Conclure.

Démonstration. Tout d'abord, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = k]) &= \mathbb{P}([Z + 1 = k]) \\ &= \mathbb{P}([Z = k - 1]) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) && \textit{(car } k-1 \in \mathbb{N}\textit{)}\end{aligned}$$

Posons $p = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}$ et $q = 1-p = \mathrm{e}^{-\lambda}$. On a bien $1-\mathrm{e}^{-\lambda} \in]0,1[$ (car $\lambda > 0$) et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = k]) = pq^{k-1}$ donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. ☐

9. (a) Ecrire une fonction **Python**, nommée `partieEnt(x)`, qui prend en paramètre un réel $x \geqslant 0$ et renvoie $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. On propose le programme **Python** suivant :

```
def partieEnt(x):
    k = 0
    while k+1 <= x:
        k = k+1
    return k
```

☐

(b) Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il simule la variable aléatoire Y (on note `lam` le réel λ).

```
def simulY(lam):
    X = rd.exponential(1 / lam)
    return partieEnt(X) + 1
```

Démonstration. Il faut faire attention au paramètre pour la simulation d'une loi exponentielle en **Python**. C'est l'inverse du paramètre de la loi dans le langage mathématiques. Ceci est dû à une différence culturelle entre la France et le monde anglo-saxon, qui définit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ de telle sorte que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ (alors qu'avec la convention française, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$). ☐

Partie 4 : De la loi géométrique à la loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 4. *Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels dans $]0,1[$ qui vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p_n)$. Alors la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.*

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$$

10. Soit $x \leqslant 0$. Donner la valeur de $F_{Y_n}(x)$.

Démonstration. Y_n est à valeurs strictement positives, donc, pour tout $x \leqslant 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$. ☐

11. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X_n}{n} \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([X_n \leqslant nx]) && \textit{(car } n > 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}([X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]) && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= 1 - \mathbb{P}([X_n > \lfloor nx \rfloor]) \\
&= 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor} && \textit{(cf question 2a)}
\end{aligned}$$

□

(b) Montrer que $\lfloor nx \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} nx$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

donc

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

Or, $nx > 0$ (car $x > 0$ et $n > 0$) donc

$$1 - \frac{1}{nx} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \leqslant 1$$

De plus, $\dfrac{1}{nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

d'où

$$\boxed{\lfloor nx \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} nx}$$

□

(c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor} = 1 - \mathrm{e}^{\lfloor nx \rfloor \ln(1 - p_n)}$$

Or, $np_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et $\lambda \neq 0$ donc $p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$, d'où $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, on a $\ln(1 - p_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -p_n$ et, d'après la question précédente, $\lfloor nx \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} nx$. Par produit :

$$\lfloor nx \rfloor \ln(1 - p_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -np_n x$$

D'où $\lfloor nx \rfloor \ln(1 - p_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\lambda x$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\lfloor nx \rfloor \ln(1 - p_n)} = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

et finalement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

□

12. Conclure.

Démonstration. En faisant le bilan des questions 10 et 11, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)}$$

puisque $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □