DS4 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie `numpy.random` de **Python** est importée avec la commande `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 (ECRICOME 2020)

Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

- **1 pt :** $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $(M - I_3)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

- **1 pt : le polynôme $Q(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice M**
- **1 pt : 1 est l'unique valeur propre possible de M**

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : 0 n'est pas valeur propre de M donc la matrice M est inversible**
- **1 pt : 1 est bien une valeur propre de M**
- **2 pts : raisonnement par l'absurde pour mq M n'est pas diagonalisable**

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

- **1 pt :** $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **n'est pas inversible donc 1 est une valeur propre de M**
- **1 pt :** $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

- **1 pt : La famille** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ **est une famille libre de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **car constituée de deux vecteurs non colinéaires, de plus elle engendre** $E_1(M)$ **donc c'est une base de** $E_1(M)$
- **1 pt :** $\dim\big(E_1(M)\big) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

- **2 pts :** $\text{rg}(M) < 3$ **donc** M **n'est pas inversible**

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** $\text{rg}(M) = \mathbf{2}$
- **1 pt : par théorème du rang,** $\dim(E_0(M)) = 3 - 2 = 1$
- **2 pts :** $\text{Sp}(M) = \{0, 1\}$ **par l'absurde (1 pt pour citer le thm de concaténation)**
- **1 pt : construction d'une base de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **formée de vecteurs propres de** M**. Donc** M **est diagonalisable**

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

- **1 pt : système** $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$ **bien écrit**
- **1 pt : pivot de Gauss correct**
- **1 pt : argument de dimension**

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

- **1 pt :** $f(u) = a \cdot u$
- **1 pt :** $f(v) = v$
- **1 pt : passerelle matrice endomorphisme citée (ou isomorphisme de représentation matricielle) et pas de confusions d'objets**

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

- **1 pt :** $f(w) = a \cdot v + w$**. Le choix** $\alpha = a$ **et** $\beta = 1$ **convient**
- **1 pt : passerelle matrice endomorphisme citée (ou isomorphisme de représentation matricielle) et pas de confusions d'objets**

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera T.

- **3 pt :** $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 pt par colonne correcte)**

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** T **est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux**
- **1 pt :** M **et** T **sont semblables donc ont le même spectre. D'où** $\mathrm{Sp}(M) = \{a, 1\}$
- **2 pt :** $\dim(E_1(M)) = 1$
- **2 pt :** $\dim(E_a(M)) = 1$
- **2 pt :** M **n'est pas diagonalisable en raisonnant par l'absurde (seulement 1 pt si utilisation du thm HP)**

Exercice 2 (EDHEC 2004)

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\, dt$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.

- 1 pt : $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc u_n est bien défini

2. Calculer u_0 et u_1.

- 1 pt : $u_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

- 1 pt : $u_1 = \dfrac{\ln(3)}{2}$

3. ***a)*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)}\, dt$

- 1 pt : pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^n(1-t)}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)} \geqslant 0$

- 1 pt : Par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(2)$.

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \Big[\ \ln(1+t)\ \Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(2)$.

- 2 pt : $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$ (1 pt pour la décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$)

- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- 1 pt : la suite (u_n) est croissante et majorée

- 1 pt : par théorème de convergence monotone

4. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

- 1 pt : $\ln(2) - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\, dt$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

- 1 pt : $\dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leqslant t^n$

- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$

- 1 pt : $\displaystyle\int_0^1 t^n\, dt = \left[\ \frac{t^{n+1}}{n+1}\ \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

- 1 pt : $0^{n+1} = 0$ car $n+1 > 0$

c) Donner la limite de la suite (u_n).

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
- **1 pt : par théorème d'encadrement**
- **1 pt :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n, pour tout entier $n \geqslant 2$.

- **1 pt : la fonction** $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ **est continue sur** $[1, +\infty[$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ **est impropre en** $+\infty$
- **1 pt : pour tout** $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{1+t+t^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{t^n} \geqslant 0$
- **1 pt :** $n \geqslant 2$ **donc** $\dfrac{1}{1+t+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$
- **1 pt : par critère de Riemann, l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt$ **est convergente**
- **1 pt : par critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ **est convergente**

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{t^n}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{B} \frac{1}{t^n}\, dt = \frac{1}{-n+1}(B^{-n+1} - 1)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \tfrac{1}{-n+1}(B^{-n+1} - 1) = \tfrac{-1}{-n+1} = \tfrac{1}{n-1}$ **car** $n \geqslant 2$

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : les intégrales** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ **et** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ **convergent donc l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ **est convergente**
- **1 pt : par relation de Chasles :**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt = u_n + v_n$$

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt = \ln(2)$

Exercice 3 (EDHEC 2023)

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

- **1 pt : A est triangulaire supérieure et donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) = \{a\}$

b) En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

- **2 pt : raisonnement par l'absurde bien écrit**

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

- **1 pt : La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux (qui sont distincts)**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) = \{a, b\}$

b) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

- **1 pt :** $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ **et** $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix}$
- **1 pt : les deux vecteurs sont non nuls**
- **1 pt : le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre a**
- **1 pt : le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre b**

c) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

- **2 pt : La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$:**
  - **est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires (car $b - a \neq 0$)**
  - **vérifie :** $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$
- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$

d) Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
- **1 pt : vérification de** $AP = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix} = PD$
- **1 pt :** $A = PDP^{-1}$**. Ainsi, on a prouvé que A est semblable à une matrice diagonale, et donc A est diagonalisable**

3. On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a) Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}([Y = n])$$

- **1 pt : On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X (*i.e.* la famille $([X=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X=Y]) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]\cap[X=Y])$
- **1 pt : par indépendance de X et Y utilisé au bon endroit**

b) En déduire explicitement $\mathbb{P}([X=Y])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X=Y]) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- **1 pt : somme géométrique avec** $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X=Y]) = \dfrac{1}{3}$

4. a) Soit $A(X,Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité p pour que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable.

- **1 pt : la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable si et seulement si $a=b$**
- **1 pt : la matrice aléatoire $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable si et seulement si l'événement $[X=Y]$ est réalisé**
- **1 pt :** $p = \mathbb{P}([X=Y]) = \dfrac{1}{3}$

b) On considère le script **Python** suivant :

```
m=int(input('entrez une valeur entière pour m :'))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i = 1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

- **1 pt : citation loi faible des grands nombres**
- **1 pt : pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, le réel c/m est proche de $p = \mathbb{P}([X=Y])$ (puisque c'est la fréquence empirique de réalisation de l'événement $[X=Y]$)**
- **1 pt : le réel i est proche de $1-p = \dfrac{2}{3}$**

Problème (EDHEC 2019 voie S)

Partie 1 : fonction génératrice d'une v.a.r. discrète finie

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k])\, t^k$$

1. Calculer $G(1)$.

- **1 pt : $G(1) = 1$ (0 pt si aucune référence au système complet d'événements associé à X)**

2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

- **1 pt : X est une v.a.r. finie, donc admet une espérance**
- **1 pt : G dérivable et $G'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, t^{k-1}\, \mathbb{P}([X = k])$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) = G'(1)$**

3. Établir la relation : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

- **1 pt : X v.a.r. finie, donc admet une variance**
- **2 pts : G deux fois dérivable et $G''(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\, t^{k-2}\, \mathbb{P}([X = k])$**
- **1 pt : $G''(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$**

Partie 2 : un résultat d'analyse

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

4. ***a)*** Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Indication : écrire $\ln(k+1) - \ln(k)$ sous la forme d'une intégrale.

- **1 pt : $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{k+1}$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

- **1 pt : sommation 1 à $(n-1)$ avec $n-1 \geqslant 1$ (0 si mauvaise quantification de n : $n \geqslant 2$)**
- **1 pt : télescopage $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n)$**
- **1 pt : décalage d'indice $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$**
- **1 pt : définition u_n**
- **1 pt : cas $n = 1$**

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- 1 pt : multiplication par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$

- 1 pt : théorème d'encadrement

5. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

- 1 pt

Partie 3 : étude d'une expérience aléatoire

6. Donner la loi de X_1.

- 1 pt (0 **si on ne précise pas la valeur de la constante)**

7. *a)* Montrer : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

- 4 pts : 1 pt pour initialisation, 3 pts pour hérédité (maximum 2 pts si explication « avec les mains »)

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

- 2 pts : $[X_n = 1] = [A_1 = n]$ **(dont 1 pt pour explication)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([A_1 = n]) = \dfrac{1}{n}$

- 2 pts : $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{1}{n!}$ **(**0 **si non justifié)**

- 1 pt : $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$

- 2 pts : $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ **et** $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$**,** $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{2}$**,** $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \dfrac{1}{6}$

c) En considérant le système complet d'événements $\big([A_n = n]\,, [A_n < n]\big)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!], \quad \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

- 1 pt : FPT

- 1 pt : $[A_n = n] \cap [X_n = j] = [A_n = n] \cap [X_{n-1} = j-1]$ **(**0 **si non justifié)**

- 1 pt : $[A_n < n] \cap [X_n = j] = [A_n < n] \cap [X_{n-1} = j]$ **(**0 **si non justifié)**

- 1 pt : X_{n-1} **et** A_n **sont indépendantes**

- 1 pt : $\mathbb{P}([A_n = n]) = \dfrac{1}{n}$ **(**0 **si non justifié)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([A_n < n]) = \dfrac{n-1}{n}$

- 1 pt : fin du calcul

d) Donner la loi de X_4.

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_4 = 1]) = \dfrac{1}{4}$ **et** $\mathbb{P}([X_4 = 4]) = \dfrac{1}{24}$ **d'après *7.b)***

- 2 pts : $\mathbb{P}([X_4 = 2]) = \dfrac{11}{24}$ **avec la qst précédente (dont 1 pt pour condition d'application :** $n = 4 \geqslant 2$ **et** $j = 2 \in [\![2, 4]\!]$**)**

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_4 = 3]) = \dfrac{1}{4}$ **avec le SCE** $([X_4 = 1]\,, [X_4 = 2]\,, [X_4 = 3]\,, [X_4 = 4])$

8. ***a)*** Vérifier que la formule obtenue à la question ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

- 2 pts :
(ne pas supposer ce que l'on doit démontrer . . . 0 points sinon)

b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

- 1 pt : $G_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = k-1])\, t^k + \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\, t^k$

- 1 pt : décalage d'indice

- 1 pt : $= \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\, t^{k+1} + \dfrac{n-1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k])\, t^k$ **(car** $\mathbb{P}([X_{n-1} = 0]) = 0$ **et** $\mathbb{P}([X_{n-1} = n]) = 0$**)**

- 1 pt : $= \dfrac{t}{n}\ G_{n-1}(t) + \dfrac{n-1}{n}\ G_{n-1}(t)$

c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \ = \ \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

- 1 pt : initialisation (0 **si la variable** t **n'est pas quantifiée)**

- 2 pts : hérédité

9. En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

- 1 pt : $G_n'(t) = \dfrac{1}{n}\ G_{n-1}(t) + \dfrac{t+n-1}{n}\ G_{n-1}'(t)$

- 1 pt : $E_n = \dfrac{1}{n} + E_{n-1}$ **d'après *1.* et *2.***

- 1 pt : $E_n - E_1 = u_n - 1$ **par télescopage**

- 1 pt : $E_1 = \mathbb{E}(X_1) = 1$

10. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

- 1 pt : $G_n''(1) = \dfrac{2}{n}\ G_{n-1}'(t) + G_{n-1}''(t)$

- 1 pt : $G_n''(1) = V_n - E_n + \big(E_n\big)^2$ **d'après *3.***

- 2 pts : $V_n - V_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

- 1 pt : $V_n - V_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ **par télescopage**

- 1 pt : $V_1 = \mathbb{V}(X_1) = 0$

- 1 pt : $V_n = u_n - h_n + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n}$

c) Montrer : $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- 1 pt : $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ **d'après *4.c)***

- 1 pt : $\dfrac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

- 1 pt : conclusion

Partie 4 : simulation informatique liée à l'expérience /18

Dans cette partie, on s'intéresse à la simulation **Scilab** de l'expérience aléatoire et des v.a.r. définies dans la partie précédente.

11. L'objectif de cette question est de coder une fonction **Python** permettant de simuler le tirage complet dans une urne possédant n jetons numérotés de 1 à n.

a) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie le vecteur ligne `B` obtenu en échangeant les coefficients en position `i` et `j` du vecteur ligne `A` (paramètre d'entrée de la fonction).

```
def echangeCoeff(A, i, j):
    B = np.copy(A)
    B[j] = ________
    B[i] = ________
    return B
```

- 1 pt : `B[j] = A[i]`

- 1 pt : `B[i] = A[j]`

b) On considère la fonction **Python** suivante.

```
def tirageComplet(n):
    A = np.arange(1,n+1)
    i = n-1
    for k in range(n):
        j = rd.randint(0, i+1)
        A = echangeCoeff(A, i, j)
        i = i-1
    return A
```

Commenter la stratégie adoptée dans cette fonction afin de répondre à l'objectif initial.
On précisera notamment ce que représente initialement le vecteur `A` et on commentera brièvement son évolution. On pourra proposer un exemple d'évolution du vecteur `A` lorsque $n = 4$ pour illustrer le propos.

- 4 pts

12. On s'intéresse maintenant à la fonction **Python** suivante.

```
def mystere(n):
    A = tirageComplet(n)
    m = A[0]
    x = 1
    for k in range(1,n):
        if A[k] > m:
            m = A[k]
            x = x+1
    return x
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

- 3 pts

b) Que représente la variable `x` ? On fera le lien avec une v.a.r. précédemment définie.

- 2 pts

13. On s'intéresse enfin à la fonction **Python** suivante.

```
def moyenne(n):
    N = 10000
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + mystere(n)
    return S / N
```

a) Quelle quantité est approchée par le nombre renvoyé par l'appel de `moyenne(n)` ? Expliquer.

- 3 pts (dont 1 pt pour citer la LfGN)

b) L'appel `moyenne(10**4)` produit la valeur 9.78. On rappelle par ailleurs : $\ln(10) \simeq 2.3$.
Commenter le résultat obtenu.

- 4 pts (1 pt pour `moyenne(10^4)` approche E_{10^4}, 1 pt pour $E_{10^4} = u_{10^4}$, 1 pt pour $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, 1 pt pour $\ln(10^4) \approx 9.2$)