DS5 (vA)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Exercice 1

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de la matrice A

1. ***a)*** Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

c) Donner une base de E_2.

d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

2. ***a)*** Dans cette sous-question M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

3. Donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 3x & + & y & + & z \\ y' & = & x & + & 3y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & 3z \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

5. ***a)*** Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & - & 4y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

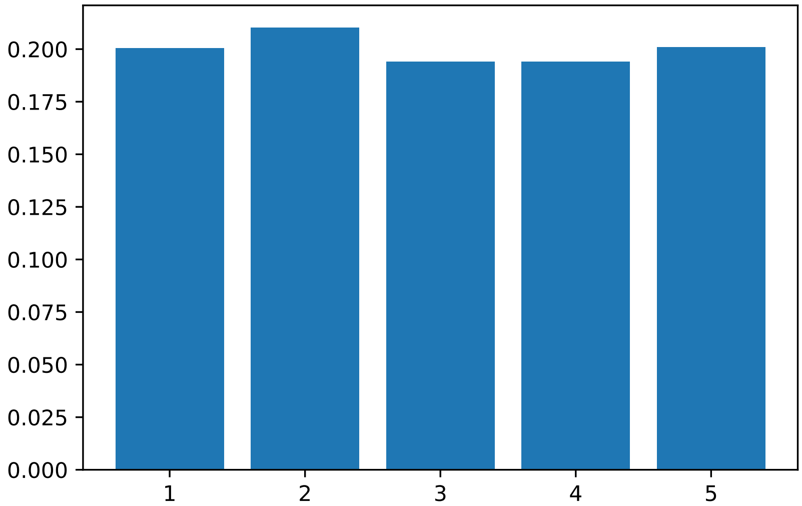
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
Recopier et compléter le programme **Python** suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = int(input('Donner un entier naturel non nul :'))
S = np.zeros(N)
for k in range(10000):
    i = 1
    M = N
    while ______________________________
        i = i+1
        M = _______
    S[i-1] = S[i-1] + 1
print(S/10000)
rangAbscisses = [j for j in range(1,N+1)]
plt.bar(rangAbscisses, S/10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}([X=1])$, $\mathbb{P}([X=2])$ et $\mathbb{P}([X=3])$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.

On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Démontrer, pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}_{C_1}([Y=j]) = \frac{1}{N}$$

7. Calculer $\mathbb{P}_{C_2}([Y=j])$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).

8. Démontrer :

$$\mathbb{P}([Y=j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\[2ex] \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

9. Calculer l'espérance de Y.

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T = 4$ et $U = 1$.

10. Préciser les valeurs prises par T.

11. Démontrer soigneusement, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(\,[T = k]\,) \;=\; \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

12. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.

13. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}(\,[U = 1] \cap [T = 2]\,)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(\,[U = 1] \cap [T = k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.

14. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(\,[U = j] \cap [T = j + 1]\,)$.

b) Que vaut $\mathbb{P}(\,[U = j] \cap [T = k]\,)$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j + 1$?

15. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?

16. Calculer $\mathbb{P}(\,[U = 1]\,)$ puis déterminer la loi de U.

Exercice 3

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx])$.

b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

5. ***a)*** Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

b) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.
On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.

b) En notant K la constante évoquée à la question ***6.a)***, donner toutes les solutions de (E_1).

c) Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

d) Montrer l'équivalence : h solution de $(E_2) \iff h - u$ solution de (E_1).

e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1,\ h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. ***a)*** Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.