DS5 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Exercice 1 (EML 2023)

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de la matrice A

1. ***a)*** Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(A-2I) = 1$
- **1 pt : justification (les trois colonnes sont égales)**

b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(A-2I) = 1 < 3$ **donc la matrice $A-2I$ est non inversible donc 2 est valeur propre de A**
- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim(E_2) = 3 - 1 = 2$

c) Donner une base de E_2.

- **1 pt : écriture du système** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$
- **1 pt :** $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est une base de E_2**

d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

- **1 pt : A possède au maximum une valeur propre autre que 2**
- **2 pt : raisonnement par l'absurde (seulement 1 pt si utilisation du théorème HP)**

2. ***a)*** Dans cette sous-question M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

- **2 pt : Les coordonnées du vecteur colonne MU sont les sommes des coefficients sur chaque ligne de la matrice M**

b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

- **1 pt :** 5 **est valeur propre de A (0 pt si il manque « $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul »)**

- 1 pt : $\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **est une base de E_5 (0 pt si preuve incomplète)**

3. Donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

- 1 pt : la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable**

- 1 pt : $D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ **et** $P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(on donne quand même 1 pt si le résultat est faux mais compatible avec une erreur antérieure)

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 3x & + & y & + & z \\ y' & = & x & + & 3y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & 3z \end{array}\right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

- 1 pt : traduction matricielle du système différentiel (S)

- 4 pt : solutions générales (dont 1 pt pour rappeler que A est diagonalisable) données directement via le théorème du cours

$$X : t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

(si la méthode du changement de variable est utilisée, 2pt pour écriture du système diagonal cohérent avec la matrice D trouvée précédemment)

5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\\z_0(t)\end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$?

- 1 pt : A est diagonalisable

- 1 pt : problème de Cauchy

b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

- 3 pt : $X_0 : t \mapsto -\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

(1pt si méthode « correcte » mais résultat faux autre que la solution nulle)

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

- 3 pt : $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

- 3 pt : raisonnement par l'absurde

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

- 2 pt : $\beta = (v_1, v_2)$ **est libre**

- 1 pt : $\mathrm{Card}(\beta) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

(on enlève 1 pt si $\dim(v_1, v_2)$ **est écrit)**

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_\beta(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\mathrm{Mat}_\beta(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $T = \mathrm{Mat}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(0 pt si aucune justification ou si la matrice n'est pas la bonne)

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

- 4 pt : D'après la formule de changement de base, on a $B = QTQ^{-1}$ **où**

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(2 pt si aucune justification ou si justification approximative)

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

- 1 pt : traduction matricielle

- 1 pt : $Y = Q^{-1}X$ **et** $X' = BX \iff Y' = TY$ **puis** $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ **et** $b(t) = C_2 \mathrm{e}^t$

- 3 pt : $a(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t$

- 1 pt : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $X(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ -t \end{pmatrix}$

(3 pt max pour des réponses pertinentes mais qui n'aboutissent pas)

Exercice 2 (ECRICOME 2015)

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

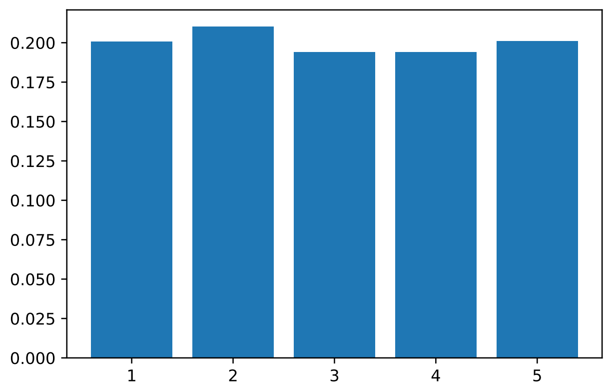
- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
Recopier et compléter le programme **Python** suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = int(input('Donner un entier naturel non nul :'))
S = np.zeros(N)
for k in range(10000):
    i = 1
    M = N
    while __rd.randint(1, M+1) != 1:__
        i = i+1
        M = __M-1__
    S[i-1] = S[i-1] + 1
print(S/10000)
rangAbscisses = [j for j in range(1,N+1)]
plt.bar(rangAbscisses, S/10000)
```

- **2 pt :** `while` `rd.randint(1, M+1) != 1:`
- **1 pt :** `M =` `M-1`

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

- 1 pt : on conjecture que X suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$

- 1 pt : loi faible des grands nombres citée

- 1 pt : interprétation du graphique (pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, $\mathbb{P}([X = k]) \simeq \dfrac{1}{5}$)

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}(\,[X = 1]\,)$, $\mathbb{P}(\,[X = 2]\,)$ et $\mathbb{P}(\,[X = 3]\,)$.

- 1 pt : $[X = 1] = N_1$ et $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{1}{N}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{N}$ et $\mathbb{P}([X = 3]) = \dfrac{1}{N}$ (événements écrits)

- 1 pt : par équiprobabilité

- 1 pt : formule des probabilités composées

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

- 1 pt : $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$

- 1 pt : $[X = k] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$

- 1 pt : explications du calcul $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{N}$

- 1 pt : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$

5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

- 1 pt : le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire est $\dfrac{N+1}{2}$

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Démontrer, pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}_{C_1}(\,[Y = j]\,) = \frac{1}{N}$$

- 1 pt : lorsque les tirages sont effectués dans l'urne U_1, le nombre de tirages nécessaires pour connaître l'urne choisie est égal au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire

- 1 pt : $\mathbb{P}_{C_1}(\,[Y = j]\,) = \mathbb{P}([X = j]) = \dfrac{1}{N}$

7. Calculer $\mathbb{P}_{C_2}(\,[Y = j]\,)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N - 1$).

- 1 pt : lorsque les tirages sont effectués dans l'urne U_2, le nombre de tirages nécessaires pour connaître l'urne choisie est égal à N (on doit vider entièrement l'urne pour se rendre compte qu'elle ne contient pas de boule noire)

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{C_2}(\,[Y=j]\,) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } j=N \\ 0 & \textbf{si } 1 \leqslant j \leqslant N-1 \end{cases}$

8. Démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y=j]\,) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1,N-1]\!] \\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2N} & \text{si } j=N \end{cases}$$

- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements** (C_1, C_2)
- **1 pt :** $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : fin du calcul en distinguant les deux cas**

9. Calculer l'espérance de Y.

- **1 pt :** Y **est finie** $(Y(\Omega) = [\![1,N]\!])$ **donc admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{j=1}^{N-1} j\mathbb{P}([Y=j]) + N\mathbb{P}([Y=N])$
- **2 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{3N+1}{4}$

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T=4$ et $U=1$.

10. Préciser les valeurs prises par T.

- **1 pt : il faut au minimum** 2 **tirages pour obtenir une boule blanche et une boule noire**
- **1 pt : explications pertinentes supplémentaires**
- **1 pt :** $T(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$

11. Démontrer soigneusement, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(\,[T=k]\,) \;=\; \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

- **1 pt :** $[T=k] = (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)$
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt : indépendance des tirages**
- **1 pt : équiprobabilité**

12. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.

- **1 pt :** T **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum k\mathbb{P}([T=k])$ **converge absolument. De plus, il s'agit d'une série à termes positifs donc il suffit de montrer la convergence.**

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} k\mathbb{P}([T=k]) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \dfrac{N-1}{N}\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{N}\right)^{k-1} - 1$
- **1 pt : séries géométriques dérivées convergentes (car** $\dfrac{N-1}{N} \in]-1,1[$ **et** $\dfrac{1}{N} \in]-1,1[$**)**
- **2 pt :** $\mathbb{E}(T) = \dfrac{N^2-N+1}{N-1}$

13. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}(\,[U=1]\cap[T=2]\,)$.
- **1 pt :** $[U=1]\cap[T=2] = [T=2]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[U=1]\cap[T=2]\,) = 2\dfrac{N-1}{N^2}$

b) Calculer $\mathbb{P}(\,[U=1]\cap[T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.
- **1 pt :** $[U=1]\cap[T=k] = N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U=1]\cap[T=k]) = \dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{k-1}$
- **1 pt : indépendance des tirages**

14. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(\,[U=j]\cap[T=j+1]\,)$.
- **1 pt :** $[U=j]\cap[T=j+1] = B_1\cap\cdots\cap B_j\cap N_{j+1}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U=j]\cap[T=j+1]) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{j}$
- **1 pt : indépendance des tirages**

b) Que vaut $\mathbb{P}(\,[U=j]\cap[T=k]\,)$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$?
- **2 pt :** $[U=j]\cap[T=k] = \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[U=j]\cap[T=k]\,) = 0$

15. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U=1]\cap[T=2]) = \mathbb{P}([T=2]) \neq \mathbb{P}([U=1])\mathbb{P}([T=2])$
- **1 pt : les variables aléatoires T et U ne sont pas indépendantes**
- **1 pt : preuve de** $\mathbb{P}([U=1]) \neq 1$

16. Calculer $\mathbb{P}(\,[U=1]\,)$ puis déterminer la loi de U.
- **1 pt :** $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à T (*i.e.* la famille** $([T=k])_{k\geqslant 2}$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U=1]) = 2\dfrac{N-1}{N^2} + \sum\limits_{k=3}^{+\infty} \dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{k-1}$
- **1 pt : somme géométrique de raison** $q = \dfrac{1}{N}$ **avec** $|q| < 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U=1]) = \dfrac{2N-1}{N^2}$
- **1 pt : si** $j \geqslant 2$**,** $\mathbb{P}([U=j]) = \mathbb{P}([U=j]\cap[T=j+1]) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{j}$

Exercice 3 (EDHEC 2023)

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$**
- **1 pt : f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1**
- **1 pt : la fonction $t \mapsto \dfrac{c}{t^{1+c}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{c}{t^{1+c}}\, dt$ est impropre en $+\infty$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_1^{B} \dfrac{c}{t^{1+c}}\, dt = 1 - \dfrac{1}{B^c}$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{B^c} = 1$ (car $c > 0$)**

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

- **1 pt : la fonction f étant nulle en dehors de $[1, +\infty[$, on peut considérer que $X(\Omega) = [1, +\infty[$**
- **1 pt : si $x < 1$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ et donc $F(x) = 0$**
- **1 pt : si $x \geqslant 1$, alors $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^c}$**

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx])$.

- **1 pt : $\mathbb{P}([X > t]) > 0$**
- **1 pt : si $x < 1$, alors $tx < t$ (car $t > 1 \geqslant 0$) d'où $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) = 0$**
- **2 pt : si $x \geqslant 1$, alors $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) = 1 - \dfrac{1}{x^c}$ (dont 1 pt pour $t > 0$ donc $tx \geqslant t$)**

b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

- **1 pt : $\mathbb{P}_{[X>t]}\left(\left[\dfrac{X}{t} \leqslant x\right]\right) = F(x)$**
- **1 pt : la fonction de répartition caractérisant la loi**

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

- **1 pt : la densité g étant nulle sur $]-\infty,1[$ et strictement positive sur $[1,+\infty[$, on peut considérer que $Y(\Omega)=[1,+\infty[$**
- **1 pt : $G(1)=\mathbb{P}([Y\leqslant 1])=\mathbb{P}([Y=1])=0$ (car Y est à densité)**

5. a) Établir l'égalité :

$$\forall x\geqslant 1,\ \forall t>1,\ G(x)=\frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)}$$

- **1 pt : $\mathbb{P}([Y\leqslant x])=\mathbb{P}_{[Y>t]}\left(\left[\dfrac{Y}{t}\leqslant x\right]\right)$**
- **1 pt : $\mathbb{P}([Y\leqslant x])=\dfrac{\mathbb{P}\left([t<Y\leqslant tx]\right)}{1-\mathbb{P}([Y\leqslant t])}$**

b) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x>1,\ \forall t>1,\ G'(x)=\frac{tG'(tx)}{1-G(t)}$$

- **1 pt : la densité g est continue sur $]1,+\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$**
- **1 pt : par composition, la fonction $h:x\mapsto G(tx)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ (pour $t>1$) et vérifie :**

$$\forall x>1, h'(x)=tG'(tx)$$

- **1 pt : on dérive l'égalité $G(x)=\dfrac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)}$ par rapport à x**

c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t>1,\ G(t)+\frac{t}{c}G'(t)=1$$

- **1 pt : on peut réécrire la relation précédente sous la forme :**

$$g(x)=\frac{tG'(tx)}{1-G(t)}\qquad(*)$$

- **1 pt : justification du passage à la limite dans la relation $(*)$ lorsque $x\to 1$**
- **1 pt : fin du calcul**

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ qui, à tout réel t de $]1,+\infty[$, associe $y(t)$.
On note (E_1) l'équation différentielle $y+\frac{t}{c}y'=0$ et (E_2) l'équation différentielle $y+\frac{t}{c}y'=1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a) Soit z la fonction définie par $z(t)=t^cy(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1,+\infty[$.

- **1 pt : la fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ donc la fonction z est dérivable sur $]1,+\infty[$**
- **1 pt : z est constante sur $]1,+\infty[$ ssi pour tout $t>1$, $z'(t)=0$**
- **1 pt : calcul correct de la dérivée $z'(t)=ct^{c-1}y(t)+t^cy'(t)$**
- **2 pt : preuve de l'équivalence et pas seulement d'une implication (1pt pour vérifier qu'on ne divise jamais par 0)**

b) En notant K la constante évoquée à la question ***6.a)***, donner toutes les solutions de (E_1).

- **2 pt : les solutions de (E_1) sont de la forme :**

$$y:t\mapsto\frac{K}{t^c},\qquad \textbf{où } K\in\mathbb{R}$$

c) Trouver une fonction u, constante sur $]1,+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

- 1 pt : la fonction $u : t \mapsto 1$ est constante sur $]1,+\infty[$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$

- 1 pt : la fonction constante $u : t \mapsto 1$ est solution de l'équation différentielle (E_2)

d) Montrer l'équivalence : h solution de $(E_2) \iff h - u$ solution de (E_1).

- 2 pt : (1 pt par implication si raisonnement par double implication)

e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1,\ h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

- 2 pt : (1 pt par implication si raisonnement par double implication)

7. *a)* Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

- 1 pt : il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t > 1, G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

- 1 pt : $G(1) = 0$ et on sait que toute fonction de répartition est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Ainsi, en faisant tendre t vers 1, on obtient $K = -1$

b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1,+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

- 1 pt : d'une part, $G(1) = 0$. D'autre part, $1 - \frac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0$. On en déduit que la relation de la question précédente est toujours valable en $t = 1$

- 1 pt : par croissance de G, on a également, pour tout $t < 1$, $G(t) = 0$

- 1 pt : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = F(t)$ (fonction de répartition de X qui suit la loi de Pareto de paramètre c)

- 1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi donc Y suit la loi de Pareto de paramètre c

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

- 1 pt : $H(x) = F(\mathrm{e}^x)$

- 1 pt : par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

- 1 pt : $Z(\Omega) = [0,+\infty[$

- 1 pt : si $x < 0$, alors $H(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

- 1 pt : si $x \geqslant 0$, alors $H(x) = 1 - \mathrm{e}^{-cx}$

- 1 pt : car $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ (dans le cas $x \geqslant 0$)

- 1 pt : Z suit la loi exponentielle de paramètre c

c) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.

```
def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)
    X = np.exp(Z)
    return X
```

- **2 pt :** `Z = rd.exponential(1/c)`
- **1 pt :** `X = np.exp(Z)`
- **1 pt : bonus si tout est juste**