DS5 (vA) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Exercice 1 (EML 2023)

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de la matrice A

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

Démonstration. On a $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(A - 2I) = 1 \text{ (les trois colonnes sont égales).}}$$

□

b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

Démonstration. La matrice A est carrée d'ordre 3 et $\mathrm{rg}(A - 2I) = 1 < 3$ donc la matrice $A - 2I$ est non inversible donc 2 est valeur propre de A. Par théorème du rang :

$$3 = \dim(E_2) + \mathrm{rg}(A - 2I)$$

donc

$$\boxed{\dim(E_2) = 3 - 1 = 2.}$$

□

c) Donner une base de E_2.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_2 &\iff (A - 2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -y - z \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y - z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre E_2
- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc

$$\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ est une base de } E_2.}$$

□

d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

Démonstration. Supposons que A possède deux valeurs propres autres que 2, que l'on note λ et μ. On note $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit U_3 un vecteur propre associé à la valeur propre λ et soit U_4 un vecteur propre associé à la valeur propre μ.
Puisque les familles (U_1, U_2), (U_3) et (U_4) sont toutes les trois libres et constituées de vecteurs propres de A, associés à des valeurs propres distinctes, on en déduit que la concaténation (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre. Il vient alors

$$3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) \geqslant \mathrm{Card}(U_1, U_2, U_3, U_4) = 4$$

C'est absurde, donc A possède au maximum une valeur propre autre que 2. □

2. a) Dans cette sous-question M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

Démonstration. Les coordonnées du vecteur colonne MU sont les sommes des coefficients sur chaque ligne de la matrice M. □

b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

Démonstration. On remarque que les sommes des coefficients sur chaque ligne de la matrice A sont toutes égales à 5. Il vient :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul, donc 5 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5.

Par un raisonnement « dimensionnel » analogue à celui fait à la question ***1.d)***, on a nécessairement $\dim(E_5) = 1$.

Or,

- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in E_5$
- La famille $\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée d'un unique vecteur non nul
- $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_5) = \dim(E_5)$

donc

$$\boxed{\mathcal{F}_5 \text{ est une base de } E_5.}$$

□

3. Donner une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Démonstration. Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable et par formule de changement de base, on a $A = PDP^{-1}$ où

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

□

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

Démonstration. On note $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de sorte que (x, y, z) est solution du système (S) si et seulement si $X' = AX$. On a vu en partie I que la matrice A est diagonalisable. Plus précisément,

- $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 5\}$
- $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_2
- $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_5

Ainsi, d'après la formule du cours, les solutions du système (S) dont de la forme :

$$X : t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

□

5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\\z_0(t)\end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$?

Démonstration. Il s'agit du théorème d'existence et d'unicité d'une solution à un problème de Cauchy. □

b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Démonstration. Soit $X : t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ une solution, où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X(0) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} &\iff \lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases}\lambda_1 = -1\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}\end{aligned}$$

En effet, cette solution convient et c'est la seule puisque la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Donc la solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{X_0 : t \mapsto -\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.}$$

□

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } B &\iff B - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(B - \lambda I) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{1\}.}$$

□

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Démonstration. Supposons la matrice B diagonalisable, alors il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telles que $B = PDP^{-1}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B, donc $D = I$. On en déduit que

$$B = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

C'est absurde, donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. On a

- $\mathrm{Card}(\beta) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$
- la famille β est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

donc

$$\boxed{\beta \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

□

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

Démonstration.

- $$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  donc, par isomorphisme de représentation matricielle : $f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2$. D'où

  $$\mathrm{Mat}_\beta(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  donc, par isomorphisme de représentation matricielle : $f(v_2) = 1v_1 + 1v_2$. D'où

  $$\mathrm{Mat}_\beta(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\boxed{T = \mathrm{Mat}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

Démonstration. D'après la formule de changement de base, on a $B = QTQ^{-1}$ où

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & - & 4y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Démonstration. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de sorte que (x, y) soit solution de (Σ) si et seulement si $X' = BX$.
On pose $Y = Q^{-1}X$. On a alors

$$X' = BX \iff (QY)' = B(QY) \iff QY' = BQY \iff Y' = Q^{-1}BQY \iff Y' = TY$$

Résolvons le système différentiel linéaire $Y' = TY$. On note $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$Y' = TY \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a' & = & a & + & b \\ b' & = & & & b \end{array} \right.$$

Il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = C_2 \mathrm{e}^t$. On injecte cette expression dans la première équation différentielle du système, a est alors solution de l'équation :

$$a' = a + C_2 \mathrm{e}^t$$

La fonction $t \mapsto C_2 t \mathrm{e}^t$ est solution particulière, donc il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t$. D'où

$$\boxed{Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t \\ C_2 \mathrm{e}^t \end{pmatrix}}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} X(t) &= QY(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t \mathrm{e}^t \\ C_2 \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2C_1 \mathrm{e}^t + C_2(2t-1)\mathrm{e}^t \\ -C_1 \mathrm{e}^t - C_2 t \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{X(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -t \end{pmatrix}.}$$

$\square$

Exercice 2 (ECRICOME 2015)

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

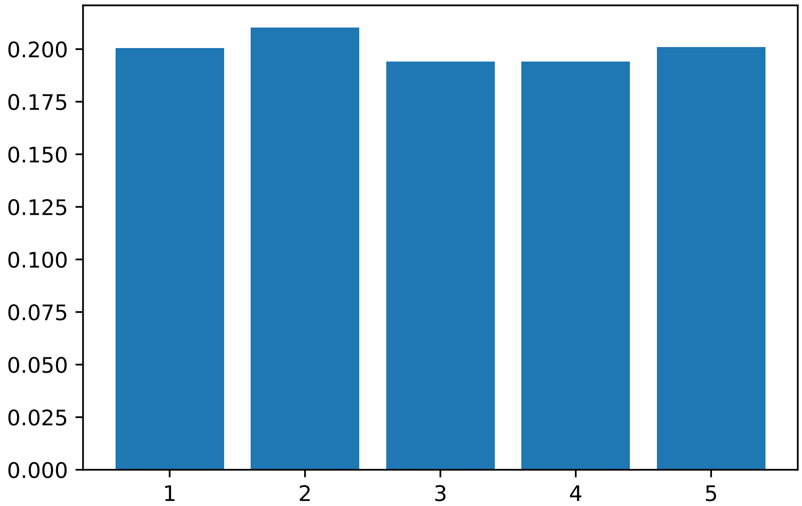
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
Recopier et compléter le programme **Python** suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = int(input('Donner un entier naturel non nul :'))
S = np.zeros(N)
for k in range(10000):
    i = 1
    M = N
    while  rd.randint(1, M+1) != 1:
        i = i+1
        M =  M-1
    S[i-1] = S[i-1] + 1
print(S/10000)
rangAbscisses = [j for j in range(1,N+1)]
plt.bar(rangAbscisses, S/10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Démonstration. On conjecture que X suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. En effet, d'après le graphique et la loi faible des grands nombres, pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$,

$$\mathbb{P}([X = k]) \simeq \frac{1}{5}$$

□

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}(\,[X = 1]\,)$, $\mathbb{P}(\,[X = 2]\,)$ et $\mathbb{P}(\,[X = 3]\,)$.

Démonstration. • On a $[X = 1] = N_1$ donc, par équiprobabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{N}}$$

• On a $[X = 2] = B_1 \cap N_2$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 2]) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2) \\ &= \frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1} && \textit{(par équiprobabilité)} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{N}}$$

• On a $[X = 3] = B_1 \cap B_2 \cap N_3$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 3]) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_2}(N_3) \\ &= \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\frac{1}{N-2} && \textit{(par équiprobabilité)} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 3]) = \frac{1}{N}}$$

□

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Démonstration. Il y a N boules en tout dans l'urne dont 1 boule noire et les tirages se font sans remise, on en déduit que

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, N]\!]}$$

Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
[X = k] \text{ est réalisé} &\iff \text{on tire la boule noire au } k^{\text{e}} \text{ tirage} \\
&\iff \begin{array}{l}\text{lors des tirages 1 à } k-1\text{, on tire une boule blanche} \\ \texttt{ET} \text{ lors du tirage } k\text{, on tire une boule noire}\end{array} \\
&\iff B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\dots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

Calculons les termes séparément :

- Par équiprobabilité : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{N-1}{N}$.
- Soit $j \in [\![2, k-1]\!]$. Si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}$ est réalisé, alors c'est que l'on a pioché $j-1$ boules blanches lors des $j-1$ premiers tirages. Le prochain tirage se fait donc dans une urne contenant 1 boule noire et $N - 1 - (j - 1) = N - j$ boules blanches. Par équiprobabilité : $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}}(B_j) = \dfrac{N-j}{N-j+1}$.
- Si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, alors c'est que l'on a pioché $k-1$ boules blanches lors des $k-1$ premiers tirages. Le prochain tirage se fait donc dans une urne contenant 1 boule noire et $N - 1 - (k - 1) = N - k$ boules blanches. Par équiprobabilité : $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{N-k+1}$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = k]) &= \frac{\cancel{N-1}}{N}\frac{\cancel{N-2}}{\cancel{N-1}}\cdots\frac{\cancel{N-k+1}}{\cancel{N-k+2}}\frac{1}{\cancel{N-k+1}} \\
&= \frac{1}{N} && \textit{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])}$$

□

5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Démonstration. On sait que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{N+1}{2}$ donc

$$\boxed{\text{Le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire est } \frac{N+1}{2}.}$$

□

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Démontrer, pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}_{C_1}(\,[Y = j]\,) = \frac{1}{N}$$

Démonstration. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Lorsque les tirages sont effectués dans l'urne U_1, le nombre de tirages nécessaires pour connaître l'urne choisie est égal au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire. D'après la partie précédente, on a bien :

$$\boxed{\mathbb{P}_{C_1}(\,[Y = j]\,) = \mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{N}}$$

□

7. Calculer $\mathbb{P}_{C_2}(\,[Y = j]\,)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).

Démonstration. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Lorsque les tirages sont effectués dans l'urne U_2, le nombre de tirages nécessaires pour connaître l'urne choisie est égal à N (on doit vider entièrement l'urne pour se rendre compte qu'elle ne contient pas de boule noire). Ainsi, on a

$$\boxed{\mathbb{P}_{C_2}(\,[Y = j]\,) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = N \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant N-1 \end{cases}}$$

□

8. Démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y = j]\,) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\[2ex] \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Démonstration. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (C_1, C_2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = j]) &= \mathbb{P}([Y = j] \cap C_1) + \mathbb{P}([Y = j] \cap C_2) \\ &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}_{C_1}([Y = j]) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}([Y = j]) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_{C_1}([Y = j]) + \mathbb{P}_{C_2}([Y = j])\right) \end{aligned}$$

- Premier cas : $j < N$. Alors

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + 0\right) = \frac{1}{2N}$$

- Deuxième cas : $j = N$. Alors

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + 1\right) = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}$$

On a bien

$$\boxed{\mathbb{P}(\,[Y = j]\,) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}}$$

□

9. Calculer l'espérance de Y.

Démonstration. La variable aléatoire Y est finie ($Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$) donc admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{N} j\mathbb{P}([Y = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} j\mathbb{P}([Y = j]) + N\mathbb{P}([Y = N]) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} j\frac{1}{2N} + N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{2N} + \frac{N}{2} + \frac{N}{2N} \\
&= \frac{N}{2} + \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{2N} \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N} j \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2N}\frac{N(N+1)}{2} \\
&= \frac{N}{2} + \frac{N+1}{4} \\
&= \frac{2N + N + 1}{4} \\
&= \frac{3N+1}{4}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{3N+1}{4}}$$

□

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,…, alors $T = 4$ et $U = 1$.

10. Préciser les valeurs prises par T.

Démonstration. Tout d'abord, T est à valeurs entières. Ensuite, il faut au minimum 2 tirages pour obtenir une boule blanche et une boule noire. Enfin, T peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. En effet, pour tout entier $k \geqslant 2$, si l'événement $B_1 \cap \dots B_{k-1} \cap N_k$ est réalisé (ce qui est possible), alors T prend la valeur k.
Finalement,

$$\boxed{T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![}$$

□

11. Démontrer soigneusement, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(\,[T = k]\,) \;=\; \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

Démonstration. Soit $k \geqslant 2$ un entier.

$[T = k]$ est réalisé $\iff$ k tirages ont été nécessaires pour obtenir au moins une boule noire et au moins une boule blanche

$\iff$ (au k^{e} tirage on tire une boule blanche `ET` on n'avait obtenu que des boules noires avant)
`OU`
(au k^{e} tirage on tire une boule noire `ET` on n'avait obtenu que des boules blanches avant)

$\iff$ $(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k)$ est réalisé

On en déduit, par incompatibilité, que

$$\mathbb{P}([T = k]) = \mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) + \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k)$$

De plus, les tirages se font avec remise, donc, par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P}(N_1)\dots\mathbb{P}(N_{k-1})\mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(B_1)\dots\mathbb{P}(B_{k-1})\mathbb{P}(N_k) \\
&= \frac{N-1}{N}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{N-1}{N} && \textit{(par équiprobabilité)} \\
&= \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} + \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\mathbb{P}(\,[T = k]\,) \;=\; \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}}$$

□

12. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.

Démonstration. La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\mathbb{P}([T=k])$ converge absolument. De plus, il s'agit d'une série à termes positifs donc il suffit de montrer la convergence. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}([T=k]) &= \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - \frac{N-1}{N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1
\end{aligned}$$

On reconnaît deux sommes partielles de séries géométriques dérivées convergentes (car $\frac{N-1}{N} \in]-1,1[$ et $\frac{1}{N} \in]-1,1[$). On en déduit que T admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1 \\
&= \frac{1}{N}\frac{1}{\left(1-\frac{N-1}{N}\right)^2} + \frac{N-1}{N}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} - 1 \\
&= \frac{1}{N}N^2 + \frac{N-1}{N}\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1 \\
&= N + \frac{N}{N-1} - 1 \\
&= \frac{N(N-1) + N - (N-1)}{N-1} \\
&= \frac{N^2 - N + 1}{N-1}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{N^2 - N + 1}{N-1}}$$

□

13. a) Calculer $\mathbb{P}(\,[U=1] \cap [T=2]\,)$.

Démonstration.

$[U=1] \cap [T=2]$ est réalisé $\iff$ 2 tirages ont été nécessaires pour obtenir au moins une boule noire et au moins une boule blanche
`ET`
1 boule blanche a été obtenue au cours de ces 2 tirages

$\iff$ $[T=2]$ est réalisé

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\,[U=1]\cap[T=2]\,) &= \mathbb{P}([T=2])\\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{2-1}+\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{2-1}\\ &= \frac{N-1}{N^2}+\frac{N-1}{N^2}\\ &= 2\frac{N-1}{N^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\,[U=1]\cap[T=2]\,)=2\frac{N-1}{N^2}}$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}(\,[U=1]\cap[T=k])$ pour tout entier $k\geqslant 3$.

Démonstration. Soit $k\geqslant 3$ un entier.

$[U=1]\cap[T=k]$ est réalisé $\iff$ k tirages ont été nécessaires pour obtenir au moins une boule noire et au moins une boule blanche
ET
1 boule blanche a été obtenue au cours de ces k tirages

$\iff$ $N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$ est réalisé

Par indépendance et équiprobabilité,

$$\boxed{\mathbb{P}([U=1]\cap[T=k])=\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}}$$

□

14. Soit j un entier tel que $j\geqslant 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(\,[U=j]\cap[T=j+1]\,)$.

Démonstration. Soit j un entier tel que $j\geqslant 2$.

$[U=j]\cap[T=j+1]$ est réalisé $\iff$ $j+1$ tirages ont été nécessaires pour obtenir au moins une boule noire et au moins une boule blanche
ET
j boules blanches ont été obtenues au cours de ces $j+1$ tirages

$\iff$ $B_1\cap\cdots\cap B_j\cap N_{j+1}$ est réalisé

Par indépendance et équiprobabilité,

$$\boxed{\mathbb{P}([U=j]\cap[T=j+1])=\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j}}$$

□

b) Que vaut $\mathbb{P}(\,[U=j]\cap[T=k]\,)$ pour tout entier $k\geqslant 2$ tel que $k\neq j+1$?

Démonstration. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$. Soit $k \geqslant 2$ un entier tel que $k \neq j+1$.

$[U = j] \cap [T = k]$ est réalisé $\Longleftrightarrow$ k tirages ont été nécessaires pour obtenir au moins une boule noire et au moins une boule blanche
`ET`
j boules blanches ont été obtenues au cours de ces k tirages

$\Longleftrightarrow$ k tirages ont été nécessaires pour obtenir au moins une boule noire et au moins une boule blanche
`ET`
j boules blanches ont été obtenues au cours de ces k tirages
`ET`
$k - j$ boules noires ont été obtenues au cours de ces k tirages

- Premier cas : $k > j+1$. Alors $j \geqslant 2$ et $k - j \geqslant 2$. On en déduit que si $[U = j] \cap [T = k]$ est réalisé, alors on a obtenu exactement 1 boule noire et plus de deux boules noires au cours des k premiers tirages. C'est impossible.
- Deuxième cas : $k < j+1$. Alors $j \geqslant 2$ et $k - j \leqslant 0$. On en déduit que si $[U = j] \cap [T = k]$ est réalisé, alors on a obtenu exactement 1 boule noire et moins de 0 boules noires au cours des k premiers tirages. C'est impossible.

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(\, [U = j] \cap [T = k]\,) = 0}$$

□

15. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?

Démonstration. On a remarqué à la question ***13.a)*** que

$$\mathbb{P}([U = 1] \cap [T = 2]) = \mathbb{P}([T = 2])$$

Or, $\mathbb{P}([U = 1]) \neq 1$. En effet, si on avait $\mathbb{P}([U = 1]) = 1$, on aurait en particulier $\mathbb{P}([U = 2]) = 0$ et donc

$$\mathbb{P}([U = 2] \cap [T = 3]) = 0$$

mais on a vu en question ***14.a)*** que ce n'était pas le cas.
Finalement, on a

$$\mathbb{P}([U = 1] \cap [T = 2]) = \mathbb{P}([T = 2]) \neq \mathbb{P}([U = 1])\mathbb{P}([T = 2])$$

et donc

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } T \text{ et } U \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

16. Calculer $\mathbb{P}(\, [U = 1]\,)$ puis déterminer la loi de U.

Démonstration. Tout d'abord, $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à T (*i.e.* la famille $([T = k])_{k \geqslant 2}$) :

$$\mathbb{P}([U = j]) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([U = j] \cap [T = k])$$

- Premier cas : $j = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U = 1]) &= 2\frac{N-1}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{N-1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= 2\frac{N-1}{N^2} + \frac{N-1}{N} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^{k} \\
&= \frac{N-1}{N^2} + \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^{k} && \textit{(car } \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^1 = \frac{N-1}{N^2}\textit{)} \\
&= \frac{N-1}{N^2} + \frac{N-1}{N} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{N}}\right) && \textit{(somme géométrique de raison } q = \frac{1}{N} \textit{ avec } |q| < 1\textit{)} \\
&= \frac{N-1}{N^2} + \frac{N-1}{N} \frac{1}{N} \frac{N}{N-1} \\
&= \frac{N-1}{N^2} + \frac{1}{N} \\
&= \frac{2N-1}{N^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{2N-1}{N^2}}$$

- Deuxième cas : $j \geqslant 2$. Alors tous les termes de la somme sont nuls sauf un et on a

$$\boxed{\mathbb{P}([U = j]) = \mathbb{P}([U = j] \cap [T = j+1]) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^j}$$

$\square$

Exercice 3 (EDHEC 2023)

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Démonstration. • Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < 1$, alors $f(x) = 0$.
Si $x \geqslant 1$, alors $f(x) = \dfrac{c}{x^{1+c}} \geqslant 0$ car $c > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

• La fonction f est :

× continue sur $]-\infty, 1[$ car constante sur cet intervalle ouvert,

× continue sur $]1, +\infty[$ car coïncide avec $x \mapsto \dfrac{c}{x^{1+c}}$ qui est continue sur cet intervalle ouvert.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.}$$

• Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt &= \int_{1}^{+\infty} f(t)\, dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{t^{1+c}}\, dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{c}{t^{1+c}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{c}{t^{1+c}}\, dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \int_{1}^{B} \frac{c}{t^{1+c}}\, dt &= c \int_{1}^{B} t^{-1-c}\, dt \\ &= c \left[\frac{t^{-c}}{-c} \right]_{1}^{B} && \textit{car } c > 0 \\ &= 1 - \frac{1}{B^c} \end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} 1 - \frac{1}{B^c} = 1$ (car $c > 0$) donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité.}}$$

□

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction f étant nulle en dehors de $[1, +\infty[$, on peut considérer que $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ et donc $F(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{1}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{1+c}}\ dt \\ &= 1 - \frac{1}{x^c} && \textit{(d'après le calcul effectué à la question précédente)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

□

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx])$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, remarquons que $\mathbb{P}([X > t]) > 0$ car $X(\Omega) = [1, +\infty[$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > t]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leqslant t]) \\ &= 1 - F(t) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right) && \textit{(car } t > 1\textit{)} \\ &= \frac{1}{t^c} \end{aligned}$$

- Premier cas : $x < 1$. Alors $tx < t$ (car $t > 1 \geqslant 0$) d'où

$$[X > t] \cap [X \leqslant tx] = \varnothing$$

et donc

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) = 0$$

- Deuxième cas : $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) &= \frac{\mathbb{P}([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{\mathbb{P}([X > t])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([t < X \leqslant tx])}{\frac{1}{t^c}} \\
&= t^c \left(F(tx) - F(t)\right) && \textit{(car } x \geqslant 1 \textit{ et } t > 0 \textit{ donc } tx \geqslant t\textit{)} \\
&= t^c \left(\left(1 - \frac{1}{(tx)^c}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right) \right) \\
&= t^c \left(\frac{1}{t^c} - \frac{1}{(tx)^c} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{x^c}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

□

b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>t]}\left(\left[\frac{X}{t} \leqslant x\right]\right) &= \mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx]) && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\
&= F(x) && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{2}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit que

$$\boxed{\text{la loi de } \frac{X}{t}\text{, conditionnellement à l'événement } [X > t]\text{, est la loi de } X.}$$

□

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

Commentaire

Remarquons tout d'abord une légère imprécision dans l'énoncé. Il est annoncé que nous allons démontrer la réciproque de la propriété précédente. Nous allons donc démontrer que Y suit une loi de Pareto de paramètre c. Or, nous faisons l'hypothèse que g admet une densité continue sur $[1,+\infty[$, et donc a fortiori continue en 1, alors que la densité f fixée en début d'énoncé n'est clairement pas continue en 1. C'est la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$ qui est continue sur $[1,+\infty[$, et non pas f ! Il est en réalité impossible de construire une densité continue en 1 pour la loi de Pareto. Il aurait donc fallu ici plutôt supposer que la restriction de g à $[1,+\infty[$ est continue sur $[1,+\infty[$.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

Démonstration. La densité g étant nulle sur $]-\infty, 1[$ et strictement positive sur $[1,+\infty[$, on peut considérer que $Y(\Omega) = [1,+\infty[$. Il suit que

$$\boxed{G(1) = \mathbb{P}([Y \leqslant 1]) = \mathbb{P}([Y = 1]) = 0 \text{ (car } Y \text{ est à densité)}}$$

□

5. a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

Démonstration. Soit $x \geqslant 1$. Soit $t > 1$. On sait que la loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y. Ceci se traduit par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y \leqslant x]) &= \mathbb{P}_{[Y>t]}\left(\left[\frac{Y}{t} \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}_{[Y>t]}\left([Y \leqslant tx]\right) && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left([Y > t] \cap [Y \leqslant tx]\right)}{\mathbb{P}([Y > t])} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left([t < Y \leqslant tx]\right)}{1 - \mathbb{P}([Y \leqslant t])}
\end{aligned}$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}}$$

□

b) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

Démonstration. La densité g est continue sur $]1,+\infty[$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. Soit $t > 1$. Par composition, la fonction $h : x \mapsto G(tx)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et vérifie :

$$\forall x > 1, h'(x) = tG'(tx)$$

Soit $x > 1$. D'après la question précédente, on sait que

$$G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

En dérivant cette égalité par rapport à x (remarquons que $G(t)$ et $1 - G(t)$ sont des constantes), on obtient bien :

$$\boxed{G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}}$$

$\square$

c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

Démonstration. Soient $t > 1$ et $x > 1$. On peut réécrire la relation précédente sous la forme :

$$g(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)} \quad (*)$$

(en effet, $G' = g$ sur $]1, +\infty[$ par continuité de g)

- la fonction g est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = c$
- la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ donc G' est continue en t et donc $\lim\limits_{x \to 1} G'(tx) = G'(t)$

On peut donc faire un passage à la limite dans la relation $(*)$ lorsque $x \to 1$:

$$c = \frac{tG'(t)}{1 - G(t)}$$

d'où

$$1 - G(t) = \frac{t}{c}G'(t)$$

et finalement

$$\boxed{G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1}$$

$\square$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.
On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.

Démonstration. La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ donc la fonction z est dérivable sur $]1, +\infty[$. On en déduit que

$$z \text{ est constante sur }]1, +\infty[\iff \forall t > 1, z'(t) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
z \text{ est constante sur }]1,+\infty[&\iff \forall t>1, ct^{c-1}y(t)+t^c y'(t)=0 \\
&\iff \forall t>1, cy(t)+ty'(t)=0 && \textit{(car } t^{c-1}=e^{(c-1)\ln(t)}\neq 0\textit{)} \\
&\iff \forall t>1, y(t)+\frac{t}{c}y'(t)=0 && \textit{(car } c=g(1)>0\textit{)} \\
&\iff y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1)
\end{aligned}$$

□

b) En notant K la constante évoquée à la question ***6.a)***, donner toutes les solutions de (E_1).

Démonstration. D'après la question précédente, les solutions de (E_1) sont de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{K}{t^c}, \qquad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

□

c) Trouver une fonction u, constante sur $]1,+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

Démonstration. La fonction $u : t \mapsto 1$ est constante sur $]1,+\infty[$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et vérifie :

$$\forall t>1, u(t)+\frac{t}{c}u'(t)=u(t)=1$$

donc

$$\boxed{\text{la fonction constante } u : t\mapsto 1 \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_2).}$$

□

d) Montrer l'équivalence : h solution de $(E_2) \iff h-u$ solution de (E_1).

Démonstration.

$$\begin{aligned}
h \text{ solution de } (E_2) &\iff h+\frac{t}{c}h'=1 \\
&\iff (h-1)+\frac{t}{c}(h-1)'=0 && \textit{(car } (h-1)'=h'\textit{)} \\
&\iff (h-u)+\frac{t}{c}(h-u)'=0 \\
&\iff h-u \text{ solution de } (E_1)
\end{aligned}$$

□

e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t>1,\ h(t)=1+\frac{K}{t^c}$$

Démonstration. On reprend l'équivalence précédente :

$$\begin{aligned}
h \text{ solution de } (E_2) &\iff h-u \text{ solution de } (E_1) \\
&\iff \exists K\in\mathbb{R}, \forall t>1, (h-u)(t)=\frac{K}{t^c} && \textit{(cf question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\
&\iff \exists K\in\mathbb{R}, \forall t>1, h(t)=1+\frac{K}{t^c} && \textit{(car } u(t)=1\textit{)}
\end{aligned}$$

□

7. a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

Démonstration. On sait que G est une solution de l'équation (E_2) d'après la question ***5.c)***. Ainsi, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t > 1, G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

De plus, $G(1) = 0$ et on sait que toute fonction de répartition est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Ainsi, en faisant tendre t vers 1, on obtient :

$$0 = 1 + K$$

d'où

$$K = -1$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.}$$

□

b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Démonstration. D'une part, $G(1) = 0$.
D'autre part, $1 - \frac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0$.
On en déduit que la relation de la question précédente est toujours valable en $t = 1$.
Par croissance de G, on a également, pour tout $t < 1$, $G(t) = 0$.
D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = F(t)$ (fonction de répartition de X qui suit la loi de Pareto de paramètre c).

La fonction de répartition caractérise la loi donc Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

□

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant \mathrm{e}^x]) && \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= F(\mathrm{e}^x) \end{aligned}$$

$$\boxed{H(x) = F(\mathrm{e}^x)}$$

□

b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \ln(X)(\Omega) \\ &= \ln\left(X(\Omega)\right) \\ &= \ln\left([1,+\infty[\right) \\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Premier cas : $x < 0$.
  Alors $H(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Deuxième cas : $x \geqslant 0$.
  Alors

$$\begin{aligned} H(x) &= F\left(\mathrm{e}^{x}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{c}} && \textit{(car } \mathrm{e}^{x} \geqslant 1\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-cx} \end{aligned}$$

D'où

$$H : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre c.

La fonction de répartition caractérise la loi donc Z suit la loi exponentielle de paramètre c.

□

c) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.

Démonstration. On simule une v.a.r. $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ puis on la transforme pour obtenir une simulation de $X = \mathrm{e}^{Z}$.

```
def simulX(c):
    Z = rd.exponential(1/c)
    X = np.exp(Z)
    return X
```

□