DS5 (vB)

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. Dans la première partie, on introduit un outil d'analyse asymptotique. Dans la deuxième, on étudie un type de loi spécifique et dans la troisième des conditions plus simples pour vérifier que des propriétés asymptotiques sont satisfaites. Les trois parties sont **largement indépendantes**. De plus, dans les deux dernières parties, on n'utilise de la Partie I que les résultats des questions ***5.f)(iii)*** et ***5.g)***, qu'on pourra admettre si besoin. Dans tout l'énoncé, « positif » signifie « positif ou nul » sauf indication contraire.

I. Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on notera $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturel, on notera $\min\limits_{i\in I} (x_i)$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$. Par exemple : $\min\limits_{i\in[\![1,9]\!]} \left(\dfrac{1}{i}\right) = \dfrac{1}{9}$.

1. Un exemple : déterminer $\min\limits_{i\in[\![0,4]\!]} \left(\dfrac{(-1)^i}{i+1}\right)$.

2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.

a) Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$: $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]} (x_i)$.
Montrer que la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est convergente. On note : $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k)$.

b) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3. Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 1 + (-1)^n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Déterminer $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n$.

4. ***a)*** On suppose ici que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors : $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

b) Montrer que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors : $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

c) (i) Soient α_1, α_2, ..., α_r des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$, α_i appartient à I. Démontrer : $\min\limits_{i \in [\![1,r]\!]} (\alpha_i) \in I$.

(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a : $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \geqslant 0, \ \varphi_x(h) = \min_{u \in [x, x+h]} \big(f(u)\big)$$

Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.

c) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) En déduire que la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$). On la nomme **limite inférieure de** f et elle est notée $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = f(x+2)$ (on dit que f est périodique de période 2).

(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0,4]$.

(ii) Ecrire une fonction **Python**, nommée `f(x)`, prenant en paramètre d'entrée un réel $x \in [0,2]$ et renvoyant $f(x)$.

(iii) En déduire un script **Python** traçant le graphe de la fonction f sur $[0,2]$.

(iv) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?

(v) En déduire Φ_x puis $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

f) La fonction f est de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de ***5.a)*** et ***5.b)***.

(i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a : $f(x) \geqslant \varphi_x(h)$.

(ii) En déduire l'inégalité : $\Phi_x \leqslant f(x)$.

(iii) On suppose : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on a : $f(x) \geqslant \varepsilon$.

g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, où ℓ est un réel positif.

Démontrer : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell$.

II. Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}([X > x])$.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_X(n) & = & \mathbb{P}([X = n]) \\ p_Y(n) & = & \mathbb{P}([Y = n]) \\ p_{X+Y}(n) & = & \mathbb{P}([X + Y = n]) \end{array} \right.$$

a) Montrer, pour tout n entier naturel :

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k)\, p_Y(n-k)$$

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `probSomme(n, probX, probY)`, prenant en paramètres d'entrée un entier naturel n, la liste `probX` $= [\mathbb{P}([X = 0]), \ldots, \mathbb{P}([X = n])]$ ainsi que la liste `probY` $= [\mathbb{P}([Y = 0]), \ldots, \mathbb{P}([Y = n])]$ et renvoyant $p_{X+Y}(n)$.

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+$ et continues à droite en 0, la variable $X + Y$ admet une densité notée $f_X \star f_Y$ définie, pour x positif, par :

$$(f_X \star f_Y)(x) = \int_0^x f_X(u)\, f_Y(x-u)\, du$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X + Y$.

7. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul : $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.

c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

d) Montrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$$

8. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif : $\overline{F}(x) > 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

a) Montrer, pour tout x positif :

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant \mathbb{P}([\max(X, Y) > x])$$

b) Montrer : $\mathbb{P}([\max(X, Y) > x]) = 1 - \big(F(x)\big)^2$.

c) Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

d) En déduire : $\liminf_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2$.

9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \;=\; 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Montrer :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X > x]) \;=\; \frac{1}{2}$$

b) En déduire (en utilisant la question ***8.c)***) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y > x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} \;=\; 1$$

c) Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{P}([X+Y > x]) \;=\; \mathbb{P}([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

d) Conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} \;=\; 0$$

e) Interpréter le résultat précédent.

III. Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,dx \;=\; +\infty$$

10. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

11. Étude de quelques lois particulières :

a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

(ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on ait : $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$.

(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

(i) Déterminer une densité f de X.

(ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\lambda\, x - \dfrac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right)$?

(iii) En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geqslant x_0,\ f(x)\, e^{\lambda\, x} \geqslant 1$$

(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors : $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln\big(\overline{F}(x)\big)$, pour x positif.

12. Montrer :

$$\overline{F}(x) \ = \ \exp\left(-\int_0^x r(y)\ dy\right)$$

13. On suppose : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 : $\overline{F}(x) \leqslant e^{-\varepsilon\, x}$.

b) Soit λ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer :

$$\int_0^A e^{\lambda\, x}\, f(x)\ dx \ = \ 1 - \overline{F}(A)\, e^{\lambda\, A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda\, x}\, \overline{F}(x)\ dx$$

c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda\, x}\, f(x)\ dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

14. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}([Z > \alpha]) \ \leqslant \ \frac{1}{\alpha}\, \mathbb{E}(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = \mathbb{E}\left(e^{\lambda\, X}\right)$ existe.

b) Soit x strictement positif. Montrer : $\overline{F}(x) \leqslant c \cdot e^{-\lambda\, x}$.

c) Montrer : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

La condition $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

15. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a :

$$\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| \ < \ \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) Montrer, pour tout y de $[0,1]$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

c) Montrer, pour tout y de $[0,1]$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = 1$$

d) Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(R(x+1) - R(x)\big) = 0$.

16. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

(i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0,1]$, on a :

$$\overline{F}(x+y) \ \geqslant \ \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$

<u>Indication</u> : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

(ii) Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$\overline{F}(x_0+n) \ \geqslant \ \overline{F}(x_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, \frac{n}{2}}$$

(iii) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\, \overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, \overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

c) En raisonnant par l'absurde, montrer : $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.