DS5 (vB) - Barème - ESSEC II 2015

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. Dans la première partie, on introduit un outil d'analyse asymptotique. Dans la deuxième, on étudie un type de loi spécifique et dans la troisième des conditions plus simples pour vérifier que des propriétés asymptotiques sont satisfaites. Les trois parties sont **largement indépendantes**. De plus, dans les deux dernières parties, on n'utilise de la Partie I que les résultats des questions ***5.f)(iii)*** et ***5.g)***, qu'on pourra admettre si besoin. Dans tout l'énoncé, « positif » signifie « positif ou nul » sauf indication contraire.

I. Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on notera $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturel, on notera $\min\limits_{i\in I} (x_i)$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$. Par exemple : $\min\limits_{i\in[\![1,9]\!]} \left(\dfrac{1}{i}\right) = \dfrac{1}{9}$.

1. Un exemple : déterminer $\min\limits_{i\in[\![0,4]\!]} \left(\dfrac{(-1)^i}{i+1}\right)$.

- **1 pt :** $x_0 = 1, \qquad x_1 = -\dfrac{1}{2}, \qquad x_2 = \dfrac{1}{3}, \qquad x_3 = -\dfrac{1}{4}, \qquad x_4 = \dfrac{1}{5}$
- **1 pt :** $\min\limits_{i\in[\![0,4]\!]} \left(\dfrac{(-1)^i}{i+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$

2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.

a) Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$: $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]} (x_i)$.
Montrer que la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est convergente. On note : $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k)$.

- **1 pt : la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est minorée par** 0
- **1 pt : la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est décroissante**
- **1 pt : théorème de convergence monotone cité**

b) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

- **1 pt :** $u_n(k+1) \leqslant u_{n+1}(k)$
- **1 pt : passage à la limite donne** $u_n \leqslant u_{n+1}$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

- **1 pt : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, et alors elle converge vers une limite finie d'après le théorème de convergence monotone**
- **1 pt : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée, et alors elle diverge vers** $+\infty$

3. Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 1 + (-1)^n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$.

- **2 pt : suite** $(y_n)_{n\geqslant 0}$
  - × **1 pt :** $u_n(k) = 0$
  - × **1 pt : justification correcte**
- **3 pt : suite** $(z_n)_{n\geqslant 0}$
  - × **2 pt :** $u_n(k) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } 0 \leqslant n \leqslant 1 \\ 2 & \textbf{si } n \geqslant 2 \end{cases}$
  - × **1 pt : justification correcte**

b) Déterminer $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n$.

- **1 pt :** $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$
- **2 pt :** $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n = 2$

4. a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors : $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

- **1 pt :** $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]} (x_i) = x_n$
- **1 pt :** $u_n = x_n$
- **1 pt :** $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$

b) Montrer que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors : $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

- **1 pt :** $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]} (x_i) = x_{n+k}$
- **1 pt :** $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n+k} = \ell$
- **1 pt :** $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell = \ell$

c) (i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$, α_i appartient à I. Démontrer : $\min\limits_{i\in[\![1,r]\!]} (\alpha_i) \in I$.

- **1 pt :** $E = \{\alpha_i \mid i \in [\![1,r]\!]\}$ **est fini, donc** $\min\limits_{i\in[\![1,r]\!]} (\alpha_i) \in E$**.**
- **1 pt : il existe** $k \in [\![1,r]\!]$ **tel que** $\min\limits_{i\in[\![1,r]\!]} (\alpha_i) = \alpha_k$

(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a : $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

- **1 pt : bonne traduction de l'hypothèse** $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
- **2 pt : fin de la preuve**

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \geqslant 0,\ \varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} \big(f(u)\big)$$

Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt :** $\{f(u) \mid u \in [x, x+h]\} \subset \{f(u) \mid u \in [x, x+t]\}$
- **1 pt :** $\min\limits_{u\in[x,x+t]} \big(f(u)\big) \leqslant \min\limits_{u\in[x,x+h]} \big(f(u)\big)$

b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.

- **1 pt :** φ_x **est décroissante sur** $\mathbb{R}_+$ **et** φ_x **est minorée par** 0 **sur** $\mathbb{R}_+$ **(car** f **est à valeurs dans** $\mathbb{R}^+$**)**

c) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt :** $\varphi_x(h) \leqslant \varphi_y(x - y + h)$
- **1 pt : passage à la limite lorsque** h **tend vers** $+\infty$

d) En déduire que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$). On la nomme **limite inférieure de** f et elle est notée $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

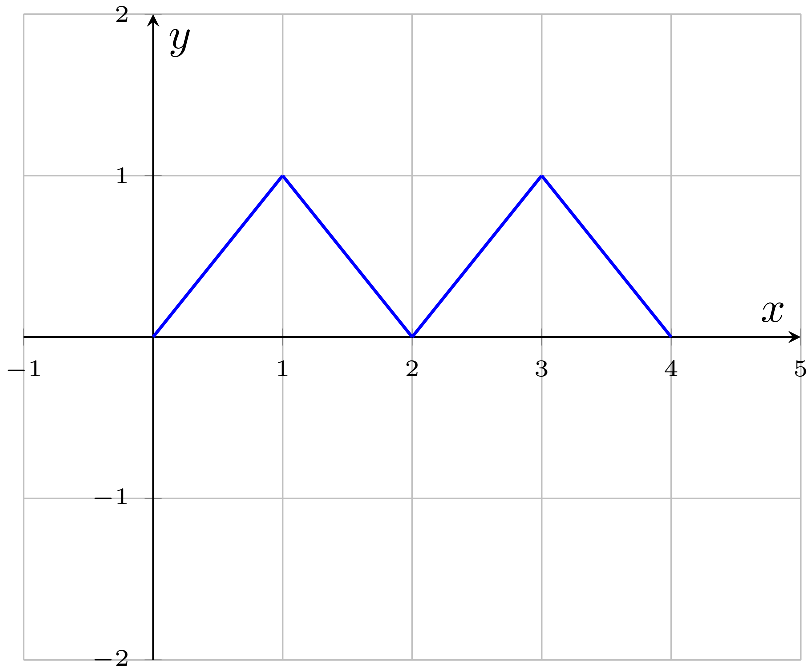
- **1 pt : soit** $x \mapsto \Phi_x$ **est majorée, et alors la limite** $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_x$ **existe et est finie**
- **1 pt : soit** $x \mapsto \Phi_x$ **n'est pas majorée, et alors la limite** $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_x$ **existe et vaut** $+\infty$

e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(x + 2)$ (on dit que f est périodique de période 2).

(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0, 4]$.



- **2 pt : graphe au dessus de** $[0, 2]$

- **1 pt : graphe au dessus de** $[2,4]$

(ii) Ecrire une fonction **Python**, nommée `f(x)`, prenant en paramètre d'entrée un réel $x \in [0,2]$ et renvoyant $f(x)$.

```
def f(x):
    if x < 1:
        return x
    else:
        return 2-x
```

- **2 pt : programme correct**
- **1 pt : bonus si aucune faute de syntaxe**

(iii) En déduire un script **Python** traçant le graphe de la fonction f sur $[0,2]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Xabs = np.linspace(0,2,1000)
Yord = [f(x) for x in Xabs]
plt.plot(Xabs, Yord)
plt.grid()
```

- **1 pt : importation bibliothèques**
- **1 pt :** `Xabs = np.linspace(0,2,1000)`
- **1 pt :** `Yord = [f(x) for x in Xabs]`
- **1 pt :** `plt.plot(Xabs, Yord)`

(iv) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?

- **1 pt :** $\varphi_x(h) = 0$
- **1 pt : utilisation de la 2-périodicité de** f

(v) En déduire Φ_x puis $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- **1 pt :** $\Phi_x = \lim\limits_{h\to+\infty} \varphi_x(h) = \lim\limits_{h\to+\infty} 0 = 0$
- **1 pt :** $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

f) La fonction f est de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de ***5.a)*** et ***5.b)***.

(i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a : $f(x) \geqslant \varphi_x(h)$.

- **1 pt :** $f(x) \in \{f(u) \mid u \in [x, x+h]\}$

(ii) En déduire l'inégalité : $\Phi_x \leqslant f(x)$.

- **1 pt : passage à la limite lorsque** h **tend vers** $+\infty$

(iii) On suppose : $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on a : $f(x) \geqslant \varepsilon$.

- **1 pt : idée de poser** $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$
- **1 pt : bonne traduction de** $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_x = \ell$

g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant g(x)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, où ℓ est un réel positif.

  Démontrer : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell$.

- **1 pt : traduction de** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$
- **3 pt : preuve correcte**

II. Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}([X > x])$.

6. a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_X(n) & = & \mathbb{P}([X = n]) \\ p_Y(n) & = & \mathbb{P}([Y = n]) \\ p_{X+Y}(n) & = & \mathbb{P}([X + Y = n]) \end{array} \right.$$

Montrer, pour tout n entier naturel :

$$p_{X+Y}(n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} p_X(k)\, p_Y(n-k)$$

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$
- **1 pt : découpage de la somme**
- **1 pt : indépendance de X et Y**

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `probSomme(n, probX, probY)`, prenant en paramètres d'entrée un entier naturel n, la liste `probX` $= [\mathbb{P}([X = 0]), \dots, \mathbb{P}([X = n])]$ ainsi que la liste `probY` $= [\mathbb{P}([Y = 0]), \dots, \mathbb{P}([Y = n])]$ et renvoyant $p_{X+Y}(n)$.

```python
def probSomme(n, probX, probY):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + probX[k] * probY[n-k]
    return S
```

- **1 pt : initialisation variable** `S`
- **1 pt : bonne taille de boucle** `for`
- **1 pt :** `S = S + probX[k] * probY[n-k]`
- **1 pt : bonus si tout est juste**

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+$ et continues à droite en 0, la variable $X + Y$ admet une densité notée $f_X \star f_Y$ définie, pour x positif, par :

$$(f_X \star f_Y)(x) \ = \ \int_0^x f_X(u)\, f_Y(x-u)\, du$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X + Y$.

7. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul : $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}$.

a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda\, x}$**
- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $\overline{F}(x) = e^{-\lambda\, x}$**

b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.

- **2 pts : vérification des hypothèses (X et Y sont des v.a.r. positives, indépendantes, à densité continue sur $\mathbb{R}_+$, continues à droite en 0)**
- **2 pts : $(f \star f)(x) = \lambda^2\, x\, e^{-\lambda\, x}$ (dont 1 pt pour : $\forall u \in [0, x]$, $u \geqslant 0$ et $x - u \geqslant 0$)**

c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

- **1 pt : comme f_{X+Y} densité de $X + Y$, $F_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt$**
- **1 pt : $(X + Y)(\Omega) \subset [0, +\infty[$ donc f_{X+Y} nulle sur $]-\infty, 0[$**
- **1 pt : $F_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt = \int_{0}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt = \int_{0}^{x} (f \star f)(t)\ dt$**
- **1 pt : validité IPP ($u(t) = t$, $v(t) = -\dfrac{1}{\lambda}\ e^{-\lambda\, t}$)**
- **1 pt : $F_{X+Y}(x) = 1 - (1 + \lambda\, x)\, e^{-\lambda\, x}$**

d) Montrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \ = \ +\infty$$

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \lambda\, x$**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$**

8. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif : $\overline{F}(x) > 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

a) Montrer, pour tout x positif :

$$\overline{F_{X+Y}}(x) \;\geqslant\; \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

- **1 pt :** $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$ **car** X **et** Y **à valeurs positives**
- **1 pt :** $\overline{F_{X+Y}}(x) \;\geqslant\; \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$

b) Montrer : $\mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) = 1 - \big(F(x)\big)^2$.

- **1 pt :** $[\max(X,Y) \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$
- **1 pt : indépendance de** X **et** Y
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant x])\ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \big(F(x)\big)^2$ **car** X **et** Y **ont même loi**

c) Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

- **1 pt :** $\dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = \dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{1-F(x)} = 1 + F(x)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ **car** F **est une fonction de répartition**

d) En déduire : $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2$.

- **1 pt : d'après *3.a)* et *3.b)*,** $\overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant 1 - \big(F(x)\big)^2$
- **1 pt : comme** $\overline{F}(x) > 0$ **(**X **à support illimité à droite),** $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant \dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)}$
- **3 pts : on applique le résultat admis *(2)* à** $f_1 : x \mapsto \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)}$ **et** $g_1 : x \mapsto \dfrac{1-\big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)}$
  - × **1 pt :** f_1 **et** g_1 **continues sur** $\mathbb{R}_+$
  - × **1 pt :** f_1 **et** g_1 **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$
  - × **1 pt : reste des hypothèses (**$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) \geqslant g_1(x)$ **et** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 2$**)**

9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \;=\; 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Montrer :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) \;=\; \frac{1}{2}$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[X>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])}$
- **1 pt :** $[X>x]\subset[X+Y>x]$ **car** $Y(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) = \dfrac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])} = \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)} = \frac{1}{2}$ **car la loi de X est sous-exponentielle**

b) En déduire (en utilisant la question ***3.c)***) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; 1$$

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([X>x])} \times \dfrac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])}$
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\overline{F}(x)}{1-\big(F(x)\big)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ **d'après *3.b)* et *3.c)***
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([X>x])} = \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ **d'après la question précédente**

c) Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{P}([X+Y>x]) \;=\; \mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y)>x])$$

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([\max(X,Y)\leqslant x]\,,[\max(X,Y)>x])$
- **1 pt :** $[\max(X,Y)>x]\subset[X+Y>x]$ **donc** $\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)>x]) = \mathbb{P}([\max(X,Y)>x])$

d) Conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; 0$$

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} - 1$ **d'après la question précédente**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = 1$ **d'après *4.b)***

e) Interpréter le résultat précédent.

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)>x])}$
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)>x])} = \dfrac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([\max(X,Y)>x])}$
- **1 pt : toute interprétation pertinente**

III. Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx \ = \ +\infty$$

10. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

- **1 pt : structure raisonnement par contraposée**
- **1 pt : si X n'est pas à support illimité à droite, alors il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}([X > x_0]) = 0$, donc $\mathbb{P}([X \leqslant x_0]) = 1$.**
- **2 pts : $\mathbb{P}([X \leqslant x_0]) = 1$ donc f_X est nulle sur $[x_0, +\infty[$.**
- **2 pts : pour $\lambda = 1$ (par exemple), $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{x}\,dx = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x_0 < 1 \\ \displaystyle\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{e}^{x}\,dx & \text{si } x_0 \geqslant 1 \end{array}\right.$, donc converge**

-1 si confusion $\forall$ / $\exists$

11. Étude de quelques lois particulières :

a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

- **1 pt : si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \mu\,\mathrm{e}^{-\mu\,x}$**
- **3 pts : en choisissant $\lambda = \dfrac{\mu}{2}$, on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{\mu}{2}\,x}\,dx$ converge**
  - × **1 pt : choix de λ**
  - × **2 pts : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx$ converge**

b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

- **1 pt : f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$**
- **2 pts : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
  - × **1 pt : $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = 1 - \frac{1}{1+B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$**

(ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on ait : $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$.

- **1 pt :** $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\lambda x}}{x^2} = \lambda^2 \, \dfrac{e^{\lambda x}}{(\lambda x)^2}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\lambda x}}{(\lambda x)^2} = +\infty$ **par croissances comparées, donc :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} = +\infty$
- **1 pt : par définition de la limite, il existe** $x_0 > 0$ **tel que :** $\forall x \geqslant x_0$, $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$

(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

- **1 pt :** $x \mapsto \dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2}$ **continue sur** $[1,+\infty[$
- **1 pt :** $\forall x > x_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant \dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^0}\, dx$ **divergente**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2}\, dx$ **diverge par critère de comparaision d'intégrales de fonctions continues positives, donc** X **à queue lourde**

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

(i) Déterminer une densité f de X.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$
- **2 pts :** $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty,0] \\ \Phi\big(\ln(x)\big) & \textbf{si } x \in \,]0,+\infty[\end{cases}$
  - × **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
  - × **1 pt : cas** $x > 0$
- **2 pts :** X **est une v.a.r. à densité**
  - × **1 pt :** F_X **continue sur** $\mathbb{R}$
  - × **1 pt :** F_X **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0
- **2 pts :** $f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty,0] \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2} & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$
  - × **0 pt : cas** $x \in \,]-\infty,0[$ **(déjà évalué)**
  - × **1 pt : cas** $x \in \,]0,+\infty[$
  - × **1 pt : choix** $f_X(0)$

-1 si la dérivation n'est pas effectuée sur des ouverts

(ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\lambda x - \dfrac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x)\right)$?

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\lambda x - \dfrac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x)\right) = +\infty$ **par croissances comparées**

(iii) En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geqslant x_0,\ f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1$$

- **1 pt :** $f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{\lambda\, x - \frac{1}{2}\ \left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} = +\infty$ **d'après la question précédente (+ composition de limites)**
- **1 pt : par définition de la limite, il existe** $x_0 > 0$ **tel que :** $\forall x \geqslant x_0$**,** $f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1$

(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

- **2 pts : même démonstration qu'en *6.b) (iii)***

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée. On pose alors : $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)$, pour x positif.

12. Montrer :

$$\overline{F}(x) \ = \ \exp\left(-\int_0^x \ r(y)\ dy\right)$$

- **2 pts :** $F(0) = 0$
  - × **1 pt :** $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$
  - × **1 pt :** F **continue en** 0
- **1 pt :** R **dérivable sur** $]0, +\infty[$ **et dérivable à droite en** 0
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}_+$**,** $R'(x) = r(x)$
- **1 pt :** $\exp\left(-\displaystyle\int_0^x \ r(y)\ dy\right) = \overline{F}(x)$

13. On suppose : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 : $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$.

- **2 pts :** $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{R(x)}{x} & \textbf{si } x \in\ ]0, +\infty[\\ r(0) & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$ **continue sur** $\mathbb{R}_+$
  - × **1 pt :** g **continue sur** $]0, +\infty[$
  - × **1 pt :** g **continue à droite en** 0 **(car** R **dérivable à droite en** 0**)**
- **1 pt :** $x \mapsto \dfrac{R(x)}{x}$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$
- **1 pt : application du résultat *(1)* de l'énoncé : il existe** $x_0 > 0$ **et** $\varepsilon > 0$ **tels que :** $\forall x \geqslant x_0$**,** $\dfrac{R(x)}{x} \geqslant \varepsilon$
- **1 pt :** $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$ **par croissance de la fonction** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$

b) Soit λ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\, dx \;=\; 1 - \overline{F}(A)\,\mathrm{e}^{\lambda A} + \lambda \int_0^A \mathrm{e}^{\lambda x}\,\overline{F}(x)\, dx$$

- **1 pt : $u : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ et $v : x \mapsto -\overline{F}(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$**
- **1 pt : IPP**

c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\, dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

- **1 pt : $0 \leqslant \overline{F}(A)\,\mathrm{e}^{\lambda A} \leqslant \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)A}$ d'après *8.a)***
- **1 pt : par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \overline{F}(A)\,\mathrm{e}^{\lambda A} = 0$ car $\lambda < \varepsilon$**
- **1 pt : $0 \leqslant \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\lambda)x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\lambda)x}\, dx$ converge car $\lambda < \varepsilon$**
- **1 pt : par critère de comparaison d'intégrales de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx$ converge**
- **1 pt : choix de $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{2}$ (par exemple) pour conclure que la loi de X n'est pas à queue lourde**

14. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}([Z > \alpha]) \;\leqslant\; \frac{1}{\alpha}\,\mathbb{E}(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$ existe.

- **1 pt : par Th. de transfert, $\mathrm{e}^{\lambda X}$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx$ converge absolument, ce qui équivaut à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx$ converge car $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ positive**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx$ car f nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
- **1 pt : loi de X pas à queue lourde, donc il existe $\lambda > 0$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx$ converge, donc tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\, dx$ converge**

b) Soit x strictement positif. Montrer : $\overline{F}(x) \leqslant c \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

- **1 pt : $\mathbb{P}([X > x]) = \mathbb{P}(\left[\mathrm{e}^{\lambda X} > \mathrm{e}^{\lambda x}\right])$ car** exp **strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : inégalité de Markov applicable ($\mathrm{e}^{\lambda X}$ à valeurs positives et admet une espérance d'après la question précédente)**
- **1 pt : application inégalité de Markov : $\mathbb{P}(\left[\mathrm{e}^{\lambda X} > \mathrm{e}^{\lambda x}\right]) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda x}}$**

c) Montrer : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

- **1 pt : d'après qst précédente $\overline{F}(x) \leqslant c\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}$, donc** $\dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x} = \lambda$
- **1 pt :** g **et** $x \mapsto \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$ **continues sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** g **et** $x \mapsto \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$ **(sur** $\left[\dfrac{\ln(c)}{\lambda},+\infty\right[$**)**
- **1 pt : par application du résultat *(2)* de l'énoncé :** $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$

La condition $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

15. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| \ < \ \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) Montrer, pour tout y de $[0,1]$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

- **1 pt : l'hypothèse de l'énoncé est la définition de :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$
- **1 pt :** $\dfrac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

- **1 pt :** $\dfrac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = -\dfrac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)}$

c) Montrer, pour tout y de $[0,1]$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = 1$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \dfrac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x+y])}{\mathbb{P}([X > x])} = \dfrac{\mathbb{P}([X > x+y])}{\mathbb{P}([X > x])} = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$ **d'après l'énoncé**

d) Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x+1) - R(x) = 0$.

- **1 pt :** $R(x+1) - R(x) = -\ln\left(\dfrac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = 1$ **d'après *10.a)* en** $y = 1$
- **1 pt :** $\ln$ **continue en** 1

16. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

(i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0, 1]$, on a :

$$\overline{F}(x+y) \geqslant \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$

<u>Indication</u> : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

- **1 pt : X à queue longue donc il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, pour tout $y \in [0, 1]$: $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon$**
- **1 pt : $\left|\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon$ donc $\overline{F}(x)(1-\varepsilon) \leqslant \overline{F}(x+y) \leqslant \overline{F}(x)(1+\varepsilon)$**
- **1 pt : $\varepsilon = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} > 0$**

(ii) Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)\, \mathrm{e}^{-\lambda\, \frac{n}{2}}$$

- **3 pts : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)\, \mathrm{e}^{-\frac{n\,\lambda}{2}}$ par récurrence**
  - $\times$ **1 pt : initialisation**
  - $\times$ **2 pts : hérédité**

(iii) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\, \overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

- **1 pt : $0 \leqslant \left(\overline{F}(x_0)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x_0}\right)\, \mathrm{e}^{n\,\frac{\lambda}{2}}$**
- **1 pt : par théorème de comparaison $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\, \overline{F}(x_0+n) = +\infty$**

b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, \overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : utilisation qst précédente**

c) En raisonnant par l'absurde, montrer : $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.

- **1 pt : si $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} \neq 0$, alors $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$ car R à valeurs positives**
- **1 pt : d'après qst *8.* X n'est donc pas à queue lourde**
- **1 pt : d'après démonstration de *8.c)* : pour $0 < \lambda < \varepsilon$, pour tout $x \geqslant x_0$, $0 \leqslant \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \leqslant \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\lambda)\, x} \leqslant 1$**
- **1 pt : absurde car $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, \overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$**

d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.

- **1 pt : d'après les qsts *11.a)* à *11.c)*, si X à queue longue, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$**
- **1 pt : d'après qst *9.* (contraposée), on en déduit que X à queue lourde**