DS5 (vB) - Correction - ESSEC II 2015

L'étude des propriétés asymptotiques des lois de probabilités est importante pour modéliser la façon dont une expérience aléatoire a une tendance plus ou moins forte à donner des résultats numériquement grands. Dans la première partie, on introduit un outil d'analyse asymptotique. Dans la deuxième, on étudie un type de loi spécifique et dans la troisième des conditions plus simples pour vérifier que des propriétés asymptotiques sont satisfaites. Les trois parties sont **largement indépendantes**. De plus, dans les deux dernières parties, on n'utilise de la Partie I que les résultats des questions ***5.f)(iii)*** et ***5.g)***, qu'on pourra admettre si besoin. Dans tout l'énoncé, « positif » signifie « positif ou nul » sauf indication contraire.

I. Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on notera $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant k \leqslant b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturel, on notera $\min\limits_{i\in I}(x_i)$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$. Par exemple : $\min\limits_{i\in[\![1,9]\!]}\left(\dfrac{1}{i}\right) = \dfrac{1}{9}$.

1. Un exemple : déterminer $\min\limits_{i\in[\![0,4]\!]}\left(\dfrac{(-1)^i}{i+1}\right)$.

Démonstration. Notons, pour tout $i \in [\![0, 4]\!]$, $x_i = \dfrac{(-1)^i}{i+1}$. On a :

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{3}, \qquad x_3 = -\frac{1}{4}, \qquad x_4 = \frac{1}{5}$$

D'où

$$\boxed{\min_{i\in[\![0,4]\!]}\left(\frac{(-1)^i}{i+1}\right) = -\frac{1}{2}}$$

□

2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.

a) Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$: $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]}(x_i)$.
Montrer que la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est convergente. On note : $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]}(x_i) \geqslant 0$ car tous les nombres x_i sont positifs par hypothèse.
  Ainsi, la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est minorée par 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On remarque que :
  $$\{x_i \mid i \in [\![n, n+k]\!]\} \subset \{x_i \mid i \in [\![n, n+k+1]\!]\}$$
  On en déduit que
  $$\min(\{x_i \mid i \in [\![n, n+k]\!]\}) \in \{x_i \mid i \in [\![n, n+k+1]\!]\}$$
  et donc
  $$\min(\{x_i \mid i \in [\![n, n+k+1]\!]\}) \leqslant \min(\{x_i \mid i \in [\![n, n+k]\!]\})$$
  Autrement dit, $u_n(k+1) \leqslant u_n(k)$. Ainsi, la suite $\big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est décroissante.

Par théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } \big(u_n(k)\big)_{k\geqslant 0} \text{ est convergente.}}$$

□

b) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}(k) = \min_{i\in[\![n+1,n+1+k]\!]} (x_i) \qquad \text{et} \qquad u_n(k+1) = \min_{i\in[\![n,n+k+1]\!]} (x_i)$$

Or,

$$\{x_i \mid i \in [\![n+1, n+1+k]\!]\} \subset \{x_i \mid i \in [\![n, n+k+1]\!]\}$$

et donc

$$u_n(k+1) \leqslant u_{n+1}(k)$$

D'après la question précédente, les suites $(u_n(k+1))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent. On peut donc passer à la limite lorsque $k \to +\infty$. On obtient :

$$u_n \leqslant u_{n+1}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}}$$

□

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante donc, de deux choses l'une :

- soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, et alors elle converge vers une limite finie d'après le théorème de convergence monotone
- soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$

Dans les deux cas :

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ admet une limite.}}$$

□

3. Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 1 + (-1)^n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Le cas de la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$.
  Tout d'abord,
  $$(y_n)_{n\geqslant 0} = (2,0,2,0,2,0,\dots)$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned} u_n(k) &= \min_{i\in[\![n,n+k]\!]} (y_i) \\ &= \min_{i\in[\![n,n+1]\!]} (y_i) && \textit{(car } k \geqslant 1 \textit{ et la suite } (y_n)_{n\geqslant 0} \textit{ est 2-périodique)} \\ &= \min(\{0,2\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$
  Finalement,
  $$\boxed{u_n(k) = 0}$$
- Le cas de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$.
  Tout d'abord,
  $$(z_n)_{n\geqslant 0} = (2,1,2,3,2,5,2,7\dots)$$
  On en déduit que :
  × Si $n=0$: $u_n(k) = 1$. En effet, 1 est le minimum de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ et $1 \in \{z_i \mid i \in [\![0,k]\!]\}$ car $k \geqslant 1$.
  × Si $n=1$: $u_n(k) = 1$ (même argument que le point précédent).
  × Si $n \geqslant 2$: on remarque que 2 est le minimum de la suite $(z_n)_{n\geqslant 2}$ et donc
  $$2 \leqslant u_n(k) = \min_{i\in[\![n,n+k]\!]} (z_i) \leqslant \min_{i\in[\![n,n+1]\!]} (z_i) = 2$$
  (car $k \geqslant 1$). D'où $u_n(k) = 2$. Finalement,
  $$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 1,\ u_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}}$$

□

b) Déterminer $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Démonstration. • Le cas de la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$.
On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n(k) = 0$. On en déduit que
$$u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k) = 0$$
puis que
$$\liminf_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
Finalement,
$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} y_n = 0}$$

- Le cas de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$.
  On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$.

On en déduit que

$$u_n = \lim_{k \to +\infty} u_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

puis que

$$\liminf_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

Finalement,

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} z_n = 2}$$

□

4. a) On suppose ici que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors : $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n(k) = \min_{i \in [\![n, n+k]\!]} (x_i) = x_n$$

car la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante. On en déduit que

$$u_n = \lim_{k \to +\infty} u_n(k) = x_n$$

$$\boxed{\text{Si } (x_n)_{n \geqslant 0} \text{ est une suite croissante de réels positifs, alors, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n.}$$

On a alors

$$\liminf_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

et donc, si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, on a bien

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} x_n = \ell}$$

□

b) Montrer que si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors : $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n(k) = \min_{i \in [\![n, n+k]\!]} (x_i) = x_{n+k}$$

car la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante. On en déduit que

$$u_n = \lim_{k \to +\infty} u_n(k) = \lim_{k \to +\infty} x_{n+k} = \ell$$

par un argument de suite extraite. On a alors

$$\liminf_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \ell = \ell$$

Finalement,

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} x_n = \ell}$$

$\square$

c) (i) Soient α_1, α_2, ..., α_r des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$, α_i appartient à I. Démontrer : $\min\limits_{i \in [\![1,r]\!]} (\alpha_i) \in I$.

Démonstration. L'ensemble $E = \{\alpha_i \mid i \in [\![1,r]\!]\}$ est fini, donc $\min\limits_{i \in [\![1,r]\!]} (\alpha_i) \in E$. On en déduit qu'il existe $k \in [\![1,r]\!]$ tel que $\min\limits_{i \in [\![1,r]\!]} (\alpha_i) = \alpha_k$. Puisque $\alpha_k \in I$ par hypothèse, il vient que

$$\boxed{\min_{i \in [\![1,r]\!]} (\alpha_i) \in I.}$$

$\square$

(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a : $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers ℓ donc il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|x_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui se réécrit

$$-\varepsilon + \ell \leqslant x_n \leqslant \varepsilon + \ell$$

Par un argument similaire à la question précédente, il vient, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$-\varepsilon + \ell \leqslant \min_{i \in [\![n,n+k]\!]} (x_i) \leqslant \varepsilon + \ell$$

i.e.

$$-\varepsilon + \ell \leqslant u_n(k) \leqslant \varepsilon + \ell$$

On en déduit, en faisant tendre k vers $+\infty$, que

$$-\varepsilon + \ell \leqslant u_n \leqslant \varepsilon + \ell$$

puis, en faisant tendre n vers $+\infty$, que

$$-\varepsilon + \ell \leqslant \liminf_{n \to +\infty} x_n \leqslant \varepsilon + \ell$$

On a donc démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \liminf_{n \to +\infty} x_n - \ell \right| \leqslant \varepsilon$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\liminf_{n \to +\infty} x_n = \ell.}$$

Commentaire

Cette question est déraisonnable par rapport au niveau théorique attendu d'un élève de voie ECG maths appliquées (anciennement ECE).

$\square$

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \geqslant 0,\ \varphi_x(h) = \min_{u \in [x,x+h]} \big(f(u)\big)$$

Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soit $(h,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $t \geqslant h$. On remarque que

$$\{f(u) \mid u \in [x,x+h]\} \subset \{f(u) \mid u \in [x,x+t]\}$$

donc

$$\min_{u \in [x,x+t]} \big(f(u)\big) \leqslant \min_{u \in [x,x+h]} \big(f(u)\big)$$

i.e.

$$\varphi_x(t) \leqslant \varphi_x(h)$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi_x \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.

Démonstration. D'après la question précédente, φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, φ_x est minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+$ (car f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$). On en déduit que

$$\boxed{\lim_{h \to +\infty} \varphi_x(h) \text{ existe et } \lim_{h \to +\infty} \varphi_x(h) \geqslant 0.}$$

□

c) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $x \leqslant y$. Soit $h \geqslant y - x$. On remarque que

$$\{f(u) \mid u \in [y, y + ((x-y)+h)]\} = \{f(u) \mid u \in [y, x+h]\} \subset \{f(u) \mid u \in [x, x+h]\}$$

On en déduit que

$$\varphi_x(h) \leqslant \varphi_y(x - y + h)$$

On fait tendre h vers $+\infty$ (possible d'après la question ***5.b)***). On obtient :

$$\Phi_x \leqslant \Phi_y$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \Phi_x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

d) En déduire que la limite $\lim_{x \to +\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$). On la nomme **limite inférieure de** f et elle est notée $\liminf_{x \to +\infty} f(x)$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, de deux choses l'une :

- soit $x \mapsto \Phi_x$ est majorée, et alors la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x$ existe et est finie
- soit $x \mapsto \Phi_x$ n'est pas majorée, et alors la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x$ existe et vaut $+\infty$

Dans les deux cas :

$$\boxed{\text{la limite } \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x \text{ existe.}}$$

□

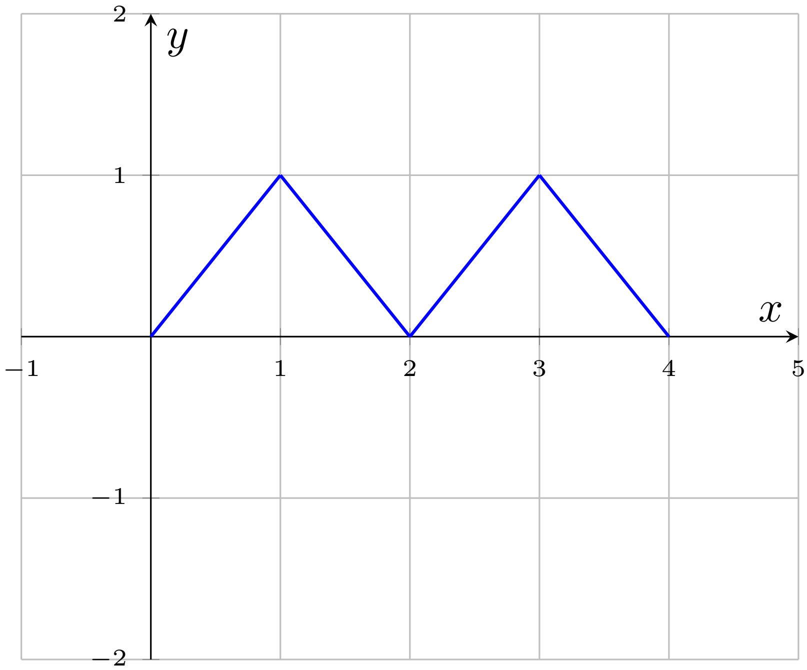
e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(x+2)$ (on dit que f est périodique de période 2).

(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0,4]$.

Démonstration.



□

(ii) Ecrire une fonction **Python**, nommée `f(x)`, prenant en paramètre d'entrée un réel $x \in [0,2]$ et renvoyant $f(x)$.

Démonstration. On part du principe que $x \in [0,2]$ donc on ne le vérifie pas dans la fonction **Python**.

```
def f(x):
    if x < 1:
        return x
    else:
        return 2-x
```

□

(iii) En déduire un script **Python** traçant le graphe de la fonction f sur $[0, 2]$.

Démonstration.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Xabs = np.linspace(0,2,1000)
Yord = [f(x) for x in Xabs]
plt.plot(Xabs, Yord)
plt.grid()
```

□

(iv) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et soit $h \geqslant 2$. La fonction f étant 2-périodique, il vient que

$$\begin{aligned}\varphi_x(h) &= \min_{u\in[x,x+h]} \big(f(u)\big) \\ &= \min_{u\in[x,x+2]} \big(f(u)\big) \\ &= \min_{u\in[0,2]} \big(f(u)\big) \\ &= 0\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\varphi_x(h) = 0}$$

□

(v) En déduire Φ_x puis $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\Phi_x = \lim_{h\to+\infty} \varphi_x(h) = \lim_{h\to+\infty} 0 = 0$$

Donc

$$\boxed{\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

□

f) La fonction f est de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de ***5.a)*** et ***5.b)***.

(i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a : $f(x) \geqslant \varphi_x(h)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et soit $h \in \mathbb{R}^+$.

$$\varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} \big(f(u)\big) = \min(\{f(u) \mid u \in [x, x+h]\})$$

Or, $f(x) \in \{f(u) \mid u \in [x, x+h]\}$, donc

$$\boxed{\varphi_x(h) \leqslant f(x)}$$

□

(ii) En déduire l'inégalité : $\Phi_x \leqslant f(x)$.

Démonstration. Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a $\varphi_x(h) \leqslant f(x)$. On en déduit, en faisant tendre h vers $+\infty$, que

$$\boxed{\Phi_x \leqslant f(x)}$$

□

(iii) On suppose : $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on a : $f(x) \geqslant \varepsilon$.

Démonstration. Notons $\ell = \liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ et posons $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$.
Par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_x = \ell$. On en déduit qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$|\Phi_x - \ell| \leqslant \varepsilon$$

i.e.

$$-\varepsilon + \ell \leqslant \Phi_x \leqslant \varepsilon + \ell$$

Et donc, puisque $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$, il vient que, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\Phi_x \geqslant \frac{\ell}{2} = \varepsilon$$

D'après la question précédente, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\boxed{f(x) \geqslant \varepsilon.}$$

□

g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, où ℓ est un réel positif.

Démontrer : $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) \geqslant \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $u \geqslant x_0$,

$$|g(u) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, pour tout $u \geqslant x_0$,

$$-\varepsilon + \ell \leqslant g(u)$$

Soit $x \geqslant x_0$. Soit $h \geqslant 0$. Soit $u \in [x, x+h]$. Par hypothèse, puisque $u \geqslant 0$,

$$f(u) \geqslant g(u) \geqslant -\varepsilon + \ell$$

Ainsi,

$$\varphi_x(h) \geqslant -\varepsilon + \ell$$

En faisant tendre h vers $+\infty$, il vient :

$$\Phi_x \geqslant -\varepsilon + \ell$$

Et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geqslant -\varepsilon + \ell$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on peut faire tendre ε vers 0. On démontre bien ainsi que

$$\boxed{\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell}$$

Commentaire

A nouveau, cette question paraît déraisonnablement difficile pour un élève de voie ECG maths appliquées (anciennement ECE).

□

II. Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}([X > x])$.

Commentaire

- On prêtera une grande attention aux notations :

$$\overline{F}(x) \ \neq \ \cancel{\overline{\mathbb{P}([X \leqslant x])}}$$

Cette dernière notation n'a en effet aucun sens.
- La notation $\overline{A}$ est licite seulement si A est un événement. Dans ce cas, $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A.
- Ici, l'énoncé emploie la notation $\overline{F}$, où F est une fonction de répartition, pour désigner la fonction de survie de X :

$$\overline{F}(x) \ = \ \mathbb{P}\left(\ \overline{[X \leqslant x]}\ \right) \ = \ \mathbb{P}([X > x]) \ = \ 1 - F(x)$$

Cette notation peut donc prêter à confusion. On prendra garde à les éviter.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_X(n) & = & \mathbb{P}([X = n]) \\ p_Y(n) & = & \mathbb{P}([Y = n]) \\ p_{X+Y}(n) & = & \mathbb{P}([X + Y = n]) \end{array} \right.$$

Montrer, pour tout n entier naturel :

$$p_{X+Y}(n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} p_X(k)\, p_Y(n-k)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=n]) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [X+Y=n]) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=n-k]) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y=n-k]) && \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= \; & \sum_{\substack{k=0 \\ n-k\in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y=n-k]) \\
+ \; & \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ n-k\notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y=n-k])} && \textit{(car } [Y=n-k]=\varnothing \textit{ si } n-k\notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y=n-k])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n-k \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ k \in [\![0,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n-k \\ 0 \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \leqslant n \\ 0 \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant k \leqslant n\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k)\, p_Y(n-k).}$$

□

7. En déduire une fonction **Python**, nommée `probSomme(n, probX, probY)`, prenant en paramètres d'entrée un entier naturel n, la liste `probX` $= [\mathbb{P}([X=0]), \dots, \mathbb{P}([X=n])]$ ainsi que la liste `probY` $= [\mathbb{P}([Y=0]), \dots, \mathbb{P}([Y=n])]$ et renvoyant $p_{X+Y}(n)$.

Démonstration. On implémente la méthode pour calculer une somme.

```
def probSomme(n, probX, probY):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + probX[k] * probY[n-k]
    return S
```

□

Par analogie, on **admettra** que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+$ et continues à droite en 0, la variable $X+Y$ admet une densité notée $f_X \star f_Y$ définie, pour x positif, par :

$$(f_X \star f_Y)(x) \ = \ \int_0^x f_X(u)\, f_Y(x-u)\ du$$

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X+Y$.

Commentaire

- La fonction $f_X \star f_Y$ est appelée *produit de convolution* de f_X et f_Y. Il est traditionnellement défini de la manière suivante.

  Soient X et Y deux v.a.r. à densité indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X et f_Y soient bornées.
  Alors la v.a.r. $X+Y$ est une v.a.r. à densité et une densité de $X+Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X \star f_Y : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(x-u)\ du$$

- L'énoncé nous fournit donne ici le produit de convolution de f_X et f_Y dans le cas où X et Y sont de plus des v.a.r. à valeurs positives. Cela a pour :
  - × avantage de simplifier le calcul de cette intégrale, puisque l'étape de réduction de l'intervalle d'intégration est déjà effectué,
  - × inconvénient de ne fournir, a priori, une expression d'une densité de $X+Y$ seulement sur $\mathbb{R}_+$. *(notons bien que nous avons une expression de f_{X+Y} sur $]-\infty,0[$ car, comme $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et ainsi : $\forall x \in\ ]-\infty,0[$, $f_{X+Y}(x) = 0$)*
- Il est fréquent que les sujets TOP3 introduisent de nouvelles notations ou nouveaux objets. On ne se laissera pas pour autant décontenancer ! Une partie de la difficulté de l'épreuve consiste alors à manipuler ces notations, avec les ambiguités qu'elles peuvent éventuellement comporter.

7. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul : $f(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a) Expliciter, pour x positif, $F(x)$ et $\overline{F}(x)$.

Démonstration.

- Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$:

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

- Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\overline{F}(x) \;=\; 1 - F(x) \;=\; \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda\, x}}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de mathématiques (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est le cas en particulier de cette question qui nécessite simplement de connaître la loi exponentielle. □

b) Calculer $(f \star f)(x)$ pour tout x positif.

Démonstration.

- Les v.a.r. X et Y sont deux v.a.r. :
  - × indépendantes,
  - × positives, car elles suivent toutes les deux la loi $\mathcal{E}(\lambda)$,
  - × de densité commune f où :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction f est donc :

- continue sur $\mathbb{R}_+$,
- continue à droite en 0.

D'après l'énoncé, la v.a.r. $X+Y$ admet alors f_{X+Y} pour densité, où, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$f_{X+Y}(x) \;=\; (f \star f)(x) \;=\; \int_0^x f(u)\, f(x-u)\, du$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$. On obtient alors :

$$(f \star f)(x) \;=\; \int_0^x f(u)\, f(x-u)\, du \;=\; \int_0^x \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, u}\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda\,(x-u)}\, du$$

En effet, comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, pour tout $u \in [0, x]$:

× $u \in [0, +\infty[$, donc : $f(u) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, u}$.

× $(x-u) \in [0, +\infty[$, donc : $f(x-u) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\,(x-u)}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} (f \star f)(x) \;&=\; \lambda^2 \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda\left(\cancel{u} + (x - \cancel{u})\right)}\, du \\ &=\; \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} \int_0^x 1\, du \\ &=\; \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ \Big[\ u\ \Big]_0^x \\ &=\; \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ (x - 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0, +\infty[,\ (f \star f)(x) = \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}.}$$

□

c) En déduire $F_{X+Y}(x)$ pour tout x positif.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X(\Omega) \subset [0,+\infty[$ et $Y(\Omega) \subset [0,+\infty[$, on en déduit : $(X+Y)(\Omega) \subset [0,+\infty[$.
  Ainsi : $\forall x \in]-\infty,0[,\ f_{X+Y}(x) = 0$.
- Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} F_{X+Y}(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} f_{X+Y}(t)\ dt & \text{(car } f_{X+Y} \text{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\text{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} (f \star f)(t)\ dt & \text{(d'après la question précédente)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} \lambda^2\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt & \text{(toujours d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-\lambda t} & & v(t) & = & -\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$.
  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} F_{Y+Y}(x) & = & \lambda^2 \left(\left[t \times \left(-\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \right) \right]_0^x - \displaystyle\int_0^x 1 \times \left(-\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \right)\ dt \right) \\ & = & \lambda^2 \left(-\dfrac{1}{\lambda}\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} - 0 + \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt \right) \\ & = & -\lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda \left[-\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_0^x \\ & = & -\lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda \left(-\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + \dfrac{1}{\lambda} \right) \\ & = & -\lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1 \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ F_{X+Y}(x) = 1 - (1+\lambda\, x)\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

□

d) Montrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$$

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$

- D'après ***7.a)*** : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \neq 0$.

- Ainsi :
$$\frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1-F_{X+Y}(x)}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - (1+\lambda x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \frac{(1+\lambda x)\,\cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}}} = 1+\lambda x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty.}$$ □

8. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif : $\overline{F}(x) > 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

a) Montrer, pour tout x positif :
$$\overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$.

- Tout d'abord : $\overline{F_{X+Y}}(x) = \mathbb{P}([X+Y > x])$.
- Or, comme X et Y sont à valeurs positives :
$$[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$$
Par croissance de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) \leqslant \mathbb{P}([X+Y > x])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant \mathbb{P}([\max(X,Y) > x]).}$$ □

Commentaire

- On affirme ici l'inclusion entre événements :
$$[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$$
Il ne semble pas dans l'esprit de ce sujet TOP3 de la justifier. Explicitons la tout de même dans cette remarque pour insister sur les objets mathématiques mis en jeu.
- Soit $\omega \in [\max(X,Y) > x]$. Alors : $\max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) > x$.
Deux cas se présentent alors :
  × si $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$, alors : $\max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) = X(\omega)$.
  Comme Y est à valeurs positives :
  $$\begin{array}{lr} & Y(\omega) \geqslant 0 \\ \text{donc} & X(\omega)+Y(\omega) \geqslant X(\omega) \\ \text{d'où} & X(\omega)+Y(\omega) \geqslant \max\big(X(\omega),Y(\omega)\big) \end{array}$$
  Par transitivité :
  $$X(\omega)+Y(\omega) \geqslant \max\big(X(\omega),Y(\omega)\big) > x$$
  × si $X(\omega) < Y(\omega)$, alors : $\max\big(X(\omega), Y(\omega)\big) = Y(\omega)$.
  Comme X est à valeurs positives :
  $$\begin{array}{lr} & X(\omega) \geqslant 0 \\ \text{donc} & X(\omega)+Y(\omega) \geqslant Y(\omega) \\ \text{d'où} & X(\omega)+Y(\omega) \geqslant \max\big(X(\omega),Y(\omega)\big) \end{array}$$
  Par transitivité :
  $$X(\omega)+Y(\omega) \geqslant \max\big(X(\omega),Y(\omega)\big) > x$$

Dans tous les cas, on obtient : $X(\omega)+Y(\omega) > x$. Ainsi : $\omega \in [X+Y > x]$.

Commentaire

- On trouvera dans certains corrigés une disjonction de cas du type :

  × ~~Si $X \geqslant Y$: alors $\max(X,Y) = X$ et $\min(X,Y) = Y$ ...~~

  × ~~Si $X < Y$: alors $\max(X,Y) = Y$ et $\min(X,Y) = X$ ...~~

  Cette disjonction de cas n'a pas de sens.
  Pour comprendre pourquoi ce n'est pas le cas, il faut avoir bien saisi la différence entre la relation d'ordre opérant sur les réels et celle opérant sur les applications.

  × Lorsque a et b sont des réels, on a :

  $$a \leqslant b \quad \texttt{OU} \quad a > b$$

  On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur les réels est une relation d'ordre **totale** : on peut toujours comparer deux réels.

  × La relation d'ordre sur les v.a.r. est elle aussi notée $\leqslant$ et est définie par :

  $$X \leqslant Y \ \Leftrightarrow \ \forall \omega \in \Omega, \ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$$

  Cette relation d'ordre n'est pas **totale**. Autrement dit, il existe des v.a.r. X et Y qui ne sont pas comparables par la relation $\leqslant$. Plus précisément, dès qu'il existe deux tirages $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$ tels que :

  $$X(\omega_1) \leqslant Y(\omega_1) \quad \text{et} \quad X(\omega_2) > Y(\omega_2)$$

  alors aucune des relations : $X \leqslant Y$ et $X > Y$ n'est vérifiée puisque chacune de ces deux inégalités définie une propriété qui doit être vérifiée **pour tout** ω.

  La relation d'ordre définie sur les v.a.r. est dite **partielle** (on ne peut pas comparer toutes les v.a.r.). La disjonction de cas présentée plus haut fait l'hypothèse forte que l'on peut comparer les v.a.r. X et Y. Cette hypothèse n'est pas raisonnable et une telle disjonction n'a donc pas lieu d'être.

- C'est aussi l'occasion de revenir sur la définition de la v.a.r. $\max(X,Y)$. On rappelle :

  $$\max(X,Y) : \omega \mapsto \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geqslant Y(\omega) \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) < Y(\omega) \end{cases}$$

  Remarquons de nouveau que ce sont bien les deux **réels** $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ que l'on compare (et non les v.a.r. X et Y).

- On pouvait également démontrer l'inclusion $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$ à l'aide de l'égalité entre v.a.r. :

  $$X + Y \ = \ \max(X,Y) + \min(X,Y)$$

  En effet :

  × comme $X(\Omega) \subset [0,+\infty[$ et $Y(\Omega) \subset [0,+\infty[$, alors : $\big(\min(X,Y)\big)(\Omega) \subset [0,+\infty[$.

  × On en déduit l'inégalité entre v.a.r. :

  $$X + Y \ \geqslant \ \max(X,Y)$$

  Ainsi, on retrouve bien : $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$.

b) Montrer : $\mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) = 1 - \big(F(x)\big)^2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) & = & 1 - \mathbb{P}([\max(X,Y) \leqslant x]) & \\
 & = & 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) & \\
 & = & 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\
 & = & 1 - F(x) \times F(x) &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ \mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) = 1 - \big(F(x)\big)^2}$$

□

c) Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = 2$.

Démonstration.

- Soit $x \in [0,+\infty[$.
  - × On a bien : $\overline{F}(x) \neq 0$ car X est à support illimité à droite.
  - × De plus :
  $$\frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = \frac{\cancel{\big(1 - F(x)\big)}\ \big(1 + F(x)\big)}{\cancel{1 - F(x)}} = 1 + F(x)$$
- Or F est une fonction de répartition. D'où : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)} = 2.}$$

□

d) En déduire : $\displaystyle\liminf_{x\to+\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après ***8.a)*** :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{F_{X+Y}}(x) & \geqslant & \mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) \\
 & & \shortparallel \\
 & & 1 - \big(F(x)\big)^2 \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{)}
\end{array}$$

- Or, comme X est à support illimité à droite : $\overline{F}(x) > 0$. Ainsi :

$$\frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant \frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)}$$

- On note alors :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \qquad \text{et} \qquad g_1 : x \mapsto \frac{1 - \big(F(x)\big)^2}{\overline{F}(x)}$$

On obtient :

× la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$ car elle est le quotient $\dfrac{h_1}{h_2}$ de :

- $h_1 : x \mapsto \overline{F_{X+Y}}(x) = 1 - F_{X+Y}(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ car la v.a.r. $X+Y$ est une v.a.r. à densité (d'après un résultat de l'énoncé),
- $h_2 : x \mapsto \overline{F}(x) = 1 - F(x)$ qui :

  a) est continue sur $\mathbb{R}_+$ car X est une v.a.r. à densité,

  b) `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}_+$, car X est à support illimité à droite.

× De même, la fonction g_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

× Démontrons que la fonction f_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_1(x) \geqslant 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- comme F et F_{X+Y} sont des fonctions de répartition :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant F_{X+Y}(x) \leqslant 1$$

  Ainsi :

$$1 \geqslant \overline{F}(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 1 \geqslant \overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant 0$$

- De plus, comme X est à support illimité à droite : $\overline{F}(x) > 0$.

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_1(x) \geqslant 0$$

× Démontrons que la fonction g_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On sait déjà : $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
Par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \big(F(x)\big)^2 \leqslant 1$. Ainsi :

$$1 - \big(F(x)\big)^2 \geqslant 0$$

Enfin : $\overline{F}(x) > 0$. D'où : $g_1(x) \geqslant 0$.

× D'après ce qui précède :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \ f_1(x) \geqslant g_1(x)$$

× D'après la question précédente : $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x) = 2$.

Ainsi, d'après la question ***5.g)*** : $\liminf\limits_{x \to +\infty} f_1(x) \geqslant 2$.

$$\boxed{\liminf_{x \to +\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2.}$$

□

9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si :

$$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \ = \ 2$$

où, comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.
On considère alors deux variables aléatoires réelles positives indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Montrer :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) \;=\; \frac{1}{2}$$

Démonstration.

- Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) &= \frac{\mathbb{P}([X>x]\cap[X+Y>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])} && \textit{(car, comme } Y \textit{ à valeurs positives : } [X>x]\subset[X+Y>x]\textit{)} \\ &= \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)} \end{aligned}$$

- Or, comme la loi de X est sous-exponentielle : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]) \;=\; \frac{1}{2}.}$$

□

b) En déduire (en utilisant la question ***3.c)***) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; 1$$

Démonstration.

- D'après les questions ***8.b)*** et ***8.c)*** :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])}{\mathbb{P}([X>x])} = 2$$

- D'après la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])} = \frac{1}{2}$$

- Or, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; \underbrace{\frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([X>x])}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 2} \;\times\; \underbrace{\frac{\mathbb{P}([X>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} = 1.}$$

□

c) Démontrer l'égalité :

$$\mathbb{P}([X+Y>x]) \;=\; \mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])$$

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$.
La famille ($[\max(X,Y) \leqslant x]$, $[\max(X,Y) > x]$) forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X+Y>x]) \\ = \;& \mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + \mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) > x]) \\ = \;& \mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y) > x]) \end{aligned}$$

(car X et Y à valeurs positives, donc : $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y>x]$)

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ \mathbb{P}([X+Y>x]) \;=\; \mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]) + \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])}$$

Commentaire

On rappelle que l'inclusion $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y>x]$ a déjà été démontrée en question ***3.a)***.

□

d) Conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} \;=\; 0$$

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} &= \frac{\mathbb{P}([X+Y>x]) - \mathbb{P}([\max(X,Y) > x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} - 1 \end{aligned}$$

- Or, d'après la question ***9.b)*** : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} = 0.}$$

□

e) Interpréter le résultat précédent.

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. Comme $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y>x]$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y) > x])} &= \frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) > x])} \\ &= \frac{\frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])}}{\frac{\mathbb{P}([X+Y>x] \cap [\max(X,Y) > x])}{\mathbb{P}([X+Y>x])}} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([\max(X,Y) \leqslant x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([\max(X,Y) > x])} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\mathbb{P}([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{\mathbb{P}([\max(X,Y)>x])} \;=\; \frac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X\leqslant x]\cap[Y\leqslant x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]\cup[Y>x])}$$

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X\leqslant x]\cap[Y\leqslant x])}{\mathbb{P}_{[X+Y>x]}([X>x]\cup[Y>x])} \;=\; 0$$

On en déduit que, pour de grandes valeurs de x, si l'événement $[X+Y>x]$ est réalisé, alors il est beaucoup plus probable que la v.a.r. X ou la v.a.r. Y prenne une valeur strictement supérieure à x, plutôt qu'elles prennent toutes les deux des valeurs inférieures ou égales à x.

Commentaire

On propose ici une interprétation possible du résultat de la question précédente. Toute interprétation pertinente permet assurément d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.

□

III. Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda>0$:

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,dx \;=\; +\infty$$

10. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que si la loi de X est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.

Démonstration.
Démontrons la contraposée de cette assertion : si X n'est pas à support illimité à droite, alors la loi de X n'est pas à queue lourde.
Supposons que la v.a.r. X n'est pas à support illimité à droite.
Alors il existe $x_0\in[0,+\infty[$ tel que : $\overline{F}(x_0)=0$. Autrement dit : $F(x_0)=1-\overline{F}(x_0)=1$.

- Soit $x\geqslant x_0$. Alors : $[X\leqslant x_0]\subset[X\leqslant x]$. Ainsi, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([X\leqslant x_0]) & \leqslant & \mathbb{P}([X\leqslant x]) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ F(x_0) & & F(x) \end{array}$$

  On obtient alors :

$$F(x_0) \;\leqslant\; F(x) \;\leqslant\; 1$$

  Or $F(x_0)=1$. On en déduit : $\forall x\in[x_0,+\infty[,\ F(x)=1$.

- Comme de plus X est une v.a.r. à densité, on obtient :

$$\forall x\in\,]x_0,+\infty[,\ f(x)=F'(x)=0$$

  Autrement dit, la fonction f est nulle en dehors de $[0,x_0]$.

- Démontrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^x \, dx$ est convergente.
  × La fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^x$ est continue sur $[1,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $[1,+\infty[$.
  × Deux cas se présentent :
  - si $x_0 < 1$, alors la fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^x$ est nulle sur $[1,+\infty[$. D'où : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^x \, dx = 0$.
    En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^x \, dx$ est convergente.
  - si $x_0 \geqslant 1$, alors, comme la fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^x$ est nulle en dehors de $[0, x_0]$:
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^x \, dx \ = \ \int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{e}^x \, dx$$
    Or la fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^x$ est continue sur le segment $[1, x_0]$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{e}^x \, dx$ est convergente.

  On a ainsi démontré qu'il existe $\lambda > 0$ ($\lambda = 1$) tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \, dx$ est convergente.
  On en déduit que la loi de X n'est pas à queue lourde.

Par contraposée, si la loi de X est à queue lourde, alors elle est à support illimité à droite.

Commentaire

- Soient p et q deux propositions.
  On prendra bien garde à ne pas confondre les propositions :
  × $q \Rightarrow p$: la proposition **réciproque** de $p \Rightarrow q$,
  × $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$: la proposition **contraposée** de $p \Rightarrow q$.
- En particulier, les propositions $p \Rightarrow q$ et $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ ont même valeur de vérité.
  Ce n'est pas le cas des propositions $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$. Par exemple, en notant :
$$p : x \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad q : x \in \mathbb{R}$$
  × $p \Rightarrow q$ est vraie (tout entier est un réel),
  × $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ est vraie (si un nombre n'est pas un réel, ce n'est pas non plus un entier),
  × $q \Rightarrow p$ est fausse ($\sqrt{2}$ est un réel mais ce n'est pas un entier).

□

11. Étude de quelques lois particulières :

a) Une loi exponentielle est-elle à queue lourde ?

Démonstration.

- Soit Z une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\mu)$. Alors :
$$\forall x \in [0,+\infty[, \ f(x) = \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, x}$$
- Soit $\lambda > 0$. Déterminons la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \, dx$.
  × La fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x} \, dx$ est donc impropre (seulement) en $+\infty$.

× Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^B f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,dx &= \int_1^B \mu\,\mathrm{e}^{-\mu x}\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,dx \\ &= \mu \int_1^B \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)\,x}\,dx \\ &= \mu \left[\frac{1}{\lambda-\mu}\,\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)\,x}\right]_1^B \\ &= \frac{\mu}{\lambda-\mu}\left(\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)\,B} - \mathrm{e}^{\lambda-\mu}\right)\end{aligned}$$

× On remarque qu'en choisissant λ tel que $\lambda - \mu < 0$: $\lim\limits_{B\to+\infty} \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)\,B} = 0$.

Ainsi, en choisissant par exemple $\lambda = \dfrac{\mu}{2}$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\left(\frac{\mu}{2}-\mu\right)B} = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}\,B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{\mu}{2}\,x}\,dx$ est donc convergente.

$$\boxed{\text{La loi exponentielle n'est donc pas une loi à queue lourde.}}$$

Commentaire

Lorsqu'on résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :

× « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »

× « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »

× « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »

× « La matrice A est-elle diagonalisable ? »

× « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

□

b) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si x positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

(i) Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :

  × sur $]-\infty, 0[$, en tant que fonction constante,

  × sur $]0, +\infty[$ car elle est l'inverse $\dfrac{1}{h}$ de $h : x \mapsto (1+x)^2$:

  - est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
  - `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - $\times$ si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors : $f(x) = 0 \geqslant 0$.
  - $\times$ si $x \in [0, +\infty[$, alors : $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge et vaut 1.
  - $\times$ Comme la fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$$

  - $\times$ La fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ est donc impropre (uniquement) en $+\infty$.
  - $\times$ Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B f(x)\ dx \ = \ \int_0^B \frac{1}{(1+x)^2}\ dx \ = \ \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^B \ = \ -\frac{1}{1+B} + 1$$

Or : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} -\frac{1}{1+B} + 1 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une densité de probabilité.}}$$

□

(ii) Soit λ strictement positif. Justifier l'existence d'un réel positif x_0 tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0, on ait : $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\dfrac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{\lambda x}}{x^2}$. Or, en posant le changement de variable $u = \lambda x$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^2} \ = \ \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{\left(\frac{u}{\lambda}\right)^2} \ = \ \lim_{u \to +\infty} \lambda^2 \, \frac{e^u}{u^2} \ = \ +\infty \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} = +\infty.}$$

- Par définition de la limite, on en déduit :

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists x_0 \geqslant 0,\ \forall x \geqslant x_0,\ \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant A$$

$$\boxed{\text{En particulier, pour } A = 1, \text{ il existe } x_0 \geqslant 0 \text{ tel que, pour tout } x \geqslant x_0 : \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geqslant 1.}$$

□

(iii) En déduire que la loi définie par f est à queue lourde.

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

- La fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx$ est donc impropre (uniquement) en $+\infty$.
- De plus :
  - × d'après la question précédente : $\forall x > x_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$.
  - × $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^0}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 0 ($0 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi définie par } f \text{ est à queue lourde.}}$$

Commentaire

On a passé ici sous silence la disjonction de cas suivante (qui n'aurait pas été exigée).

- Si $x_0 < 1$, alors : $\forall x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$.

  Et on peut ensuite appliquer le critère de comparaison comme ci-dessus.
- Si $x_0 \geqslant 1$, alors :
  - × $\forall x \geqslant x_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$.
  - × $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^0}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 0 ($0 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx$ est divergente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,dx$ est également divergente.

$\square$

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = \mathrm{e}^Z$.

(i) Déterminer une densité f de X.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de X : $X(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, 0]$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) \subset \,]-\infty, 0]$). D'où :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[e^Z \leqslant x\right]) & \\ & = & \mathbb{P}([Z \leqslant \ln(x)]) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \Phi\big(\ln(x)\big) & \end{array}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de Z qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\big(\ln(x)\big) & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{array}\right. .}$$

- La fonction F_X est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $F_X = \Phi \circ g$ avec :
  - $g : x \mapsto \ln(x)$ qui :
    a) est continue sur $]0, +\infty[$,
    b) vérifie : $g(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - Ψ qui est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

  × en 0. En effet :
  - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_X(x) = F_X(0) = 0$,
  - d'autre part, en posant le changement de variable $u = \ln(x)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \Phi\big(\ln(x)\big) = \lim_{u \to -\infty} \Phi(u) = 0 \qquad \textit{(car } \Phi \textit{ est une fonction de répartition)}$$

  Et ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_X(x) = F_X(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_X(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_X \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 1.}}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f de X, on dérive F_X sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in \,]-\infty, 0[$.

$$f(x) = F_X'(x) = 0$$

  × Si $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & F_X'(x) = (\Phi \circ g)'(x) & \\ & = & g'(x) \times \Phi'\big(g(x)\big) & \\ & = & \dfrac{1}{x} \times \varphi\big(\ln(x)\big) & \textit{(où } \varphi \textit{ est une densité de } Z\textit{, où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\right) & \end{array}$$

× On choisit enfin : $f(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, une densité } f \text{ de } X \text{ est : } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\right) & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}.}$$ □

(ii) Soit λ strictement positif. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\lambda\, x - \dfrac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right)$?

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x) \;=\; x \left(\lambda - \frac{1}{2}\, \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

- Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \lambda > 0, \text{ on en déduit : } \lim_{x \to +\infty} \left(\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right) = +\infty.}$$ □

(iii) En déduire qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geqslant x_0,\ f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1$$

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, \exp\left(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\right) \mathrm{e}^{\lambda\, x} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x)}\, \sqrt{2\pi}}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\big(\ln(x)\big)^2 + \lambda\, x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \exp\left(\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right) \end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\lambda\, x - \dfrac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right) = +\infty$. D'où :

$$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\lambda\, x - \frac{1}{2}\, \big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)\right) = +\infty$$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} = +\infty$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme en question } \textbf{\textit{11.b)(ii)}}, \text{ par définition de la limite, il existe } x_0 > 0 \text{ tel que :} \\ \forall x \geqslant x_0,\ f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \geqslant 1.\end{array}}$$ □

(iv) En déduire que la loi de X est à queue lourde.

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

- La fonction $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ (car F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$).
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}\,dx$ est donc impropre (uniquement) en $+\infty$.
- De plus :
  × d'après la question précédente : $\forall x \geqslant x_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x^0} \leqslant f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}$.
  × $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^0}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 0 ($0 \cancel{>} 2$). Elle est donc divergente.

  Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\, x}\,dx$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi de } X \text{ est à queue lourde.}}$$ □

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée.
On pose alors : $r(x) = \dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = -\ln\big(\overline{F}(x)\big)$, pour x positif.

12. Montrer :
$$\overline{F}(x) \ = \ \exp\left(-\int_0^x r(y)\,dy\right)$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la fonction R est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 car elle est la composée $R = h_2 \circ h_1$ avec :
  × $h_1 : x \mapsto \overline{F}(x) = 1 - F(x)$ qui :
    - est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0, car f est continue sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0,
    - vérifie : $h_1([0, +\infty[) \subset\ ]0, +\infty[$ (car X est à support illimité à droite).

  × $h_2 : x \mapsto -\ln(x)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

  De plus, soit $x \in \mathbb{R}_+$:
$$R'(x) \ = \ (h_2 \circ h_1)'(x) \ = \ h_1'(x) \times h_2'\big(h_1(x)\big) \ = \ -f(x) \times \left(-\frac{1}{\overline{F}(x)}\right) \ = \ r(x)$$
- On obtient alors :
$$\exp\left(-\int_0^x r(y)\,dy\right) \ = \ \exp\Big(-\big[\ R(y)\ \big]_0^x\Big) \ = \ \exp\Big(-\big(R(x) - R(0)\big)\Big)$$
- Or :
$$R(0) \ = \ -\ln\big(\overline{F}(0)\big) \ = \ -\ln\big(1 - F(0)\big)$$
  Comme $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$, pour tout $t \in\ ]-\infty, 0[$: $F(t) = \mathbb{P}([X \leqslant t]) = \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$.
  La v.a.r. X est de plus une v.a.r. à densité, donc F est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en 0).
  Ainsi :
$$F(0) \ = \ \lim_{t \to 0^-} F(t) \ = \ 0$$
  Et alors : $R(0) = -\ln(1 - 0) = 0$.

- On en déduit :

$$\exp\left(-\int_0^x r(y)\ dy\right) = \exp\Big(-\big(R(x)\big)\Big) = \exp\Big(\ln\big(\overline{F}(x)\big)\Big) = \overline{F}(x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \overline{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(y)\ dy\right)}$$

□

13. On suppose : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 : $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon x}$.

Démonstration.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{R(x)}{x} & \text{si } x \in \,]0,+\infty[\\ r(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Démontrons que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  - × La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions contiues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
  - × La fonction g est continue en 0. En effet, comme R est dérivable à droite en 0 (d'après la question précédente) :

$$g(x) = \frac{R(x)}{x} = \frac{R(x)-R(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} R'(0) = r(0)$$

    Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

- Démontrons que g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \geqslant 0$.
  Soit $x \in \,]0,+\infty[$.
  - × Comme F est une fonction de répartition : $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. Ainsi : $1 \geqslant \overline{F}(x) \geqslant 0$.
  - × De plus, la v.a.r. X est à support illimité à droite. D'où : $0 < \overline{F}(x)$.
  - × On obtient :

$$\begin{array}{lcl} & 0 < \overline{F}(x) \leqslant 1 & \\ \text{donc} & \ln\big(\overline{F}(x)\big) \leqslant 0 & \textit{(par croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & R(x) \geqslant 0 & \textit{(car } R(x) = -\ln\big(\overline{F}(x)\big)\textit{)} \end{array}$$

    De plus : $x > 0$. Ainsi : $g(x) \geqslant 0$.
  - × Enfin : $g(0) = r(0) = \dfrac{f(0)}{\overline{F}(0)} = f(0)$ (on a démontré en question précédente : $\overline{F}(0) = 1$).
    Or f est une densité de probabilité. On en déduit : $g(0) \geqslant 0$.

  Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \geqslant 0$.

- On sait alors :
  - × g est continue sur $\mathbb{R}_+$,
  - × g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
  - × $\liminf\limits_{x\to+\infty} g(x) > 0$.

  Alors, d'après la question ***5.f)(iii)***, il existe $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \geqslant x_0$: $g(x) \geqslant \varepsilon$.

- Soit $x \geqslant x_0$.

$$\begin{array}{rcll} g(x) \geqslant \varepsilon & \Leftrightarrow & \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \varepsilon & \\ & \Leftrightarrow & -\ln\big(\overline{F}(x)\big) \geqslant \varepsilon\, x & \textit{(car } x > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln\big(\overline{F}(x)\big) \leqslant -\varepsilon\, x & \\ & \Leftrightarrow & \overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x} & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

Finalement, il existe $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $\forall x \geqslant x_0,\ \overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$.

Commentaire

- On a détaillé ici précisément l'obtention des hypothèses nécessaires à l'application de la question ***5.g)***. On peut penser qu'une justification plus succincte aurait tout de même permis d'obtenir la grande majorité des points alloués à cette question.
- Il est cependant **indispensable** de vérifier (au moins rapidement) que ces hypothèses sont vérifiées !

□

b) Soit λ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné. Montrer :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, f(x)\ dx \ = \ 1 - \overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} + \lambda \int_0^A \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, \overline{F}(x)\ dx$$

Démonstration.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \mathrm{e}^{\lambda\, x} & & u'(x) & = & \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \\ v'(x) & = & f(x) & & v(x) & = & -\big(1 - F(x)\big) = -\overline{F}(x) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ (la fonction v est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ car f est continue sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0).
On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\ dx & = & \Big[-\overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \Big]_0^A - \displaystyle\int_0^A -\overline{F}(x)\ \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\ dx \\ & = & -\overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} + \overline{F}(0)\, \mathrm{e}^{0} + \lambda \displaystyle\int_0^A \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\ dx \end{array}$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^A f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\ dx = 1 - \overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} + \lambda \int_0^A \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\ dx.$

□

c) Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, f(x)\, dx$ converge et que la loi de X n'est pas à queue lourde.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***13.a)***, pour tout $x \geqslant x_0$: $\overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}$.
  On a de plus démontré en ***13.a)***, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $0 < \overline{F}(x)$. Ainsi :
  $$\begin{array}{lll} & 0 < \overline{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x} & \\ \text{donc} & 0 < \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon\, x}\ \mathrm{e}^{\lambda\, x} & \textit{(car } \mathrm{e}^{\lambda\, x} > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 < \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \leqslant \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)\, x} & \end{array}$$
  Or $\lambda < \varepsilon$, donc $\lambda - \varepsilon < 0$, et ainsi :
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)\, x} = 0$
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$

  $$\boxed{\text{Alors, par théorème d'encadrement : } \lim\limits_{A\to+\infty} \overline{F}(A)\, \mathrm{e}^{\lambda\, A} = 0.}$$

- De plus :
  × $\forall x \geqslant x_0,\ 0 \leqslant \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x} \leqslant \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)\, x}$
  × $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)\, x}\, dx$ est une intégrale exponentielle de paramètre $\lambda - \varepsilon$ ($\lambda - \varepsilon < 0$). Elle est donc convergente.

  Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ est convergente.

- De plus, la fonction $x \mapsto \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}$ est continue sur le segment $[0, x_0]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{x_0} \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ est donc bien définie.

  $$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{F}(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx \text{ est convergente.}}$$

  $$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx \text{ est convergente.}}$$

- On a démontré, en particulier, qu'en choisissant $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ est convergente.

  Il existe donc λ (par exemple : $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{2}$) tel que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\lambda\, x}\, dx$ est convergente.

  $$\boxed{\text{La loi de } X \text{ n'est donc pas à queue lourde.}}$$

□

14. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $\mathbb{E}(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a :
$$\mathbb{P}([Z > \alpha]) \ \leqslant\ \frac{1}{\alpha}\ \mathbb{E}(Z)$$
On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Montrer qu'il existe λ strictement positif tel que $c = \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)$ existe.

Démonstration.

- Soit $\lambda > 0$.
  Par théorème de transfert, la v.a.r. $e^{\lambda X}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx$ est absolument convergente.
  La fonction $x \mapsto f(x)\, e^{\lambda x}$ étant positive sur $\mathbb{R}$, l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx$ équivaut à sa convergence.
- De plus, comme $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$, la fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx$$

$$\boxed{\text{Finalement, la v.a.r. } e^{\lambda X} \text{ admet une espérance si et seulement si l'intégrale } \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx \text{ est convergente.}}$$

- Enfin :
  × La v.a.r. X n'est pas à queue lourde. Il existe donc $\lambda > 0$ tel que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx$ est convergente.
  × Or, la fonction $x \mapsto f(x)\, e^{\lambda x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx$ est donc bien définie.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\, e^{\lambda x}\, dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{D'après ce qui précède, on en conclut qu'il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } e^{\lambda X} \text{ admet une espérance } (\textit{i.e. } c = \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \text{ existe).}}$$

□

b) Soit x strictement positif. Montrer : $\overline{F}(x) \leqslant c \cdot e^{-\lambda x}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\overline{F}(x) \leqslant c \cdot e^{-\lambda x} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}([X > x]) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda x}} && \textit{(par définition de c)} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}([\lambda X > \lambda x]) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda x}} && \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left[e^{\lambda X} > e^{\lambda x}\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda x}} && \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Or la v.a.r. $e^{\lambda X}$:
  × est à valeurs positives (par propriété de exp),
  × admet une espérance, d'après la question précédente.
  Ainsi, comme $e^{\lambda x} > 0$, par inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(\left[e^{\lambda X} > e^{\lambda x}\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)}{e^{\lambda x}}$$

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \overline{F}(x) \leqslant c \cdot e^{-\lambda x}.}$$

Commentaire

On reconnaît dans cette question le même principe de démonstration que pour celle de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

1) faire apparaître, par équivalence, une inégalité de Markov en composant par une fonction strictement croissante (dans cette question, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ sur $\mathbb{R}$; pour l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$)

2) vérifier si les conditions d'application de l'inégalité de Markov sont bien vérifiées.

□

c) Montrer : $\liminf\limits_{x \to +\infty} \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

Démonstration.

On conserve la notation : $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{R(x)}{x} & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\\ r(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lll} & \overline{F}(x) \leqslant c\, e^{-\lambda x} & \\ \text{donc} & \ln\left(\overline{F}(x)\right) \leqslant \ln\left(c\, e^{\lambda x}\right) & \textit{(par croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & R(x) \geqslant -\big(\ln(c) - \lambda x\big) & \textit{(car : } R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x)\right)\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

On note alors h, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\ln(c)}{\lambda}\right[\\ \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[\end{cases}$$

- On obtient :
  a) la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ d'après ***13.a)***,
  b) la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
  c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ g(x) \geqslant h(x)$,
  d) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lambda$

  D'après la question ***5.g)*** : $\liminf\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lambda$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \liminf_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} \geqslant \lambda.}$$

□

Commentaire

Revenons sur les hypothèses ***b)*** et ***c)***.

- La fonction h est continue :
  - $\times$ sur $\left[0, \frac{\ln(c)}{\lambda}\right[$ en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $\left]\frac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[$, en tant que transformée affine d'une fonction continue sur $\left]\frac{\ln(c)}{\lambda}, +\infty\right[$,
  - $\times$ en $\ell = \dfrac{\ln(c)}{\lambda}$. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to \ell^-} h(x) = 0$,
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to \ell^+} h(x) = h(\ell) = \lambda - \dfrac{\cancel{\ln(c)}}{\frac{\cancel{\ln(c)}}{\lambda}} = \lambda - \lambda = 0$.

    D'où : $\lim\limits_{x \to \ell^-} h(x) \ = \ h(\ell) \ = \ \lim\limits_{x \to \ell^+} h(x)$.
- La fonction h est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in [0, \ell[$, alors : $h(x) = 0 \geqslant 0$.
  - $\times$ si $x \in [\ell, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} h(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda - \frac{\ln(c)}{x} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \geqslant \frac{\ln(c)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{\ln(c)}{\lambda} \qquad \textit{(car : } \frac{x}{\lambda} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

    Or la dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence, la première l'est aussi.
- Démontrons : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \geqslant h(x)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in [0, \ell[$, alors :
    - d'une part : $g(x) \geqslant 0$ (démontré en ***13.a)***),
    - d'autre part : $h(x) = 0$.

    D'où : $g(x) \geqslant h(x)$.
  - $\times$ si $x \in [\ell, +\infty[$, alors :
    - d'une part : $g(x) \geqslant \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$ (démontré dans cette question),
    - d'autre part : $h(x) = \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$.

    D'où : $g(x) \geqslant h(x)$.

On a détaillé ici précisément l'obtention des hypothèses nécessaires à l'application de la question ***5.g)***. On peut penser qu'une justification plus succincte aurait tout de même permis d'obtenir la grande majorité des points alloués à cette question.

La condition $\liminf\limits_{x \to +\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$ n'est pas forcément très agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

15. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel x supérieur ou égal à A, et tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| \ < \ \varepsilon$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) Montrer, pour tout y de $[0,1]$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

Démonstration.
Soit $y \in [0,1]$.

- D'après l'énoncé :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A > 0, \ \forall x \geqslant 1, \ \left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon$$

  Ceci est la définition de la propriété : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \ = \ \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } y \text{ de } [0,1] : \lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0.}$$

□

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $y \in [0,1]$.

$$\frac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\left(\cancel{1} - \overline{F}(x+y)\right) - \left(\cancel{1} - \overline{F}(x)\right)}{\overline{F}(x)} = -\frac{\overline{F}(x+y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}$$

$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)} = 0.}$$

□

c) Montrer, pour tout y de $[0,1]$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = 1$$

Démonstration.
Soit $y \in [0,1]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) &= \frac{\mathbb{P}([X > x+y] \cap [X > x])}{\mathbb{P}([X > x])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X > x+y])}{\mathbb{P}([X > x])} && \textit{(car, comme } y \geqslant 0 \textit{ :} \\
& && [X > x+y] \subset [X > x]\textit{)} \\
&= \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}
\end{aligned}$$

- Or, d'après ***15.a)*** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = 1.}$$

□

d) Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(R(x+1) - R(x)\big) = 0$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$R(x+1) - R(x) \;=\; -\ln\big(\overline{F}(x+1)\big) + \ln\big(\overline{F}(x)\big) \;=\; -\ln\left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right)$$

- Or, en appliquant ***15.a)*** avec $y = 1$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = 1$.
  Par continuité de la fonction ln en 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right) \;=\; \ln(1) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x\to+\infty} R(x+1) - R(x) = 0.}$$

□

16. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

(i) Montrer qu'il existe x_0 positif tel que pour tout x supérieur ou égal à x_0 et pour tout y de $[0,1]$, on a :

$$\overline{F}(x+y) \;\geqslant\; \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Indication : On utilisera la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi à queue longue donnée à la question précédente avec une valeur précise de ε que l'on explicitera.

Démonstration.

- On note X une v.a.r. de fonction de répartition F.
  Soit $\varepsilon > 0$. La v.a.r. X possède une queue longue. Il existe donc $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, pour tout $y \in [0,1]$:

$$\left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon$$

- Soit $x \geqslant x_0$. Soit $y \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \leqslant \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} \leqslant 1+\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{F}(x)\,(1-\varepsilon) \leqslant \overline{F}(x+y) \leqslant \overline{F}(x)\,(1+\varepsilon) \qquad \textit{(car : } \overline{F}(x) > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

- On choisit alors ε tel que $1-\varepsilon = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$, *i.e.* : $\varepsilon = 1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$.
Vérifions qu'on a bien : $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 1 > \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 > -\frac{\lambda}{2} \qquad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < \lambda \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence, la première aussi.

En choisissant $\varepsilon = 1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} > 0$, il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, pour tout $y \in [0,1]$: $\overline{F}(x+y) \geqslant \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$.

□

(ii) Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$\overline{F}(x_0+n) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}$.

- **Initialisation**
On applique le résultat de la question précédente à $x = x_0$ et $y = 1$ (on a bien $x \geqslant x_0$ et $y \in [0,1]$). On obtient :
$$\overline{F}(x_0+1) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$
D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\overline{F}(x_0+n+1) \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n+1}{2}}$).
  - × On applique le résultat de la question précédente à $x = x_0+n$ et $y = 1$ (on a bien $x \geqslant x_0$ et $y \in [0,1]$). On obtient :
  $$\overline{F}(x_0+n+1) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0+n)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$
  - × Par hypothèse de récurrence :
  $$\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}$$
  $$\text{donc} \quad \overline{F}(x_0+n)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \qquad \textit{(car } e^{-\frac{\lambda}{2}} \geqslant 0\textit{)}$$
  $$\text{d'où} \quad \overline{F}(x_0+n)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n+1}{2}}$$
  - × Ainsi, par transitivité :
  $$\overline{F}(x_0+n+1) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0+n)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}} \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n+1}{2}}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}$.

□

(iii) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) = +\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\overline{F}(x_0+n) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}$$

$$\begin{array}{lll} \text{donc} & \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\frac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)} & \textit{(car } \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)} > 0 \\ \text{d'où} & \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) \ \geqslant\ \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{\lambda\,\left(x_0+\frac{n}{2}\right)} & \end{array}$$

- Or : $\overline{F}(x_0) \geqslant 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{F}(x_0)\,\mathrm{e}^{\lambda\,\left(x_0+\frac{n}{2}\right)} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison : } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) = +\infty.}$$

□

b) Justifier que pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\,x}\,\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$. On procède par l'absurde.
Supposons que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\,x}\,\overline{F}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Il existe alors $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{\lambda\,x}\,\overline{F}(x) \leqslant M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \ \leqslant\ \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) \ \leqslant\ M$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\,(x_0+n)}\,\overline{F}(x_0+n) = +\infty$.
Absurde !

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, pour tout } \lambda \text{ strictement positif,} \\ \text{la fonction } x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\,x}\,\overline{F}(x) \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}_+.\end{array}}$$

□

c) En raisonnant par l'absurde, montrer : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
Supposons : $\liminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} \neq 0$.

- On a démontré en question ***13.a)*** : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $R(x) \geqslant 0$. On en déduit :

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} \ >\ 0$$

  D'après la question ***13.***, la loi de X n'est pas à queue lourde.
- D'après la question ***13.a)***, il existe $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant x_0$:

$$0 \ \leqslant\ \overline{F}(x) \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-\varepsilon\,x}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \lambda < \varepsilon$. On a déjà démontré en ***13.c)***, pour tout $x \geqslant x_0$:

$$0 \ \leqslant\ \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \ \leqslant\ \mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)\,x}$$

  Comme $\lambda - \varepsilon < 0$, on en déduit : $\mathrm{e}^{(\lambda-\varepsilon)\,x} \leqslant 1$. D'où :

$$0 \ \leqslant\ \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \ \leqslant\ 1$$

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \overline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \text{ est bornée sur } [x_0, +\infty[.}$$

- La fonction $x \mapsto \overline{F}(x)\, e^{\lambda\, x}$ est de plus continue sur le segment $[0, x_0]$.

$$\boxed{\text{Elle est donc bornée sur le segment } [0, x_0].}$$

Finalement, la fonction $x \mapsto \overline{F}(x)\, e^{\lambda\, x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Absurde ! (d'après la question précédente)

$$\boxed{\text{Finalement : } \liminf_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0.}$$

Commentaire

On note $H : x \mapsto \overline{F}(x)\, e^{\lambda\, x}$. On utilise ici l'implication :

$$H \text{ bornée sur } [0, x_0] \text{ et sur } [x_0, +\infty[\quad \Rightarrow \quad H \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+$$

Démontrons la.
Supposons que la fonction H est bornée sur $[0, x_0]$ et sur $[x_0, +\infty[$.

- La fonction H est bornée sur $[0, x_0]$. On en déduit qu'il existe $M_1 \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, x_0], \ |H(x)| \leqslant M_1$$

- La fonction H est bornée sur $[x_0, +\infty[$. On en déduit qu'il existe $M_2 \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, \ |H(x)| \leqslant M_2$$

- On note alors $M = \max(M_1, M_2)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in [0, x_0]$, alors :
  $$|H(x)| \leqslant M_1 \leqslant M$$
  × si $x \in [x_0, +\infty[$, alors :
  $$|H(x)| \leqslant M_2 \leqslant M$$

  Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|H(x)| \leqslant M$.
  Autrement dit, la fonction H est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

□

d) Conclure que toute loi à queue longue possède une queue lourde.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. de loi à queue longue.

- D'après la question ***16.*** : $\liminf_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.
- On a de plus démontré en question ***14.*** :

$$\text{La loi de } X \text{ n'est pas à queue lourde} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$$

Par contraposée, la loi de X est à queue lourde.

$$\boxed{\text{Toute loi à queue longue possède une queue lourde.}}$$

□