

## Rappels de cours

1. Il faut connaître par cœur les limites au bord de l'ensemble de définition des fonctions usuelles :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

(remarque :  $x^0 = 1$ )

- pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\alpha^x = e^{x \ln(\alpha)}$  et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

(remarque :  $1^x = 1$ )

2. Il faut connaître par cœur les équivalents usuels :

- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

3. Il faut connaître par cœur les développements limités usuels :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

# 1 Exercices

**Exercice 1 :** Calculer les limites suivantes.

*Méthode : appliquer les règles d'opérations algébriques usuelles sur les limites.*

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(x)$           | 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x + \ln(x)$          | 7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{2 + \frac{1}{\ln(x)}}$     |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + e^x$            | 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} + \ln(x)$ | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} + e^{\frac{1}{x}}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \ln(x)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^x$           |  |

**Exercice 2 :** Calculer les limites suivantes.

*Méthode : appliquer une croissance comparée.*

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$      | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$                                      | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \text{ (poser } y = \sqrt{x} \text{)}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$ |  | 7. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$   |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} \text{ (poser } y = x^2 \text{)}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x)$   |

**Exercice 3 :** Calculer un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  et lorsque  $x \rightarrow 0$ .

*Méthode : trouver le terme dominant, éventuellement en utilisant une croissance comparée.*

- |                        |                               |                                 |
|------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = x + e^x$    | 4. $f(x) = \ln(x) + \ln(x)^2$ | 7. $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$   |
| 2. $f(x) = x + \ln(x)$ | 5. $f(x) = \ln(x) + e^x$      | 8. $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2}$ |
| 3. $f(x) = x^4 + e^x$  | 6. $f(x) = e^x + e^{2x}$      |                                 |

**Exercice 4 :** Peut-on trouver un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  qui soit plus simple que l'expression initiale ? Si oui, le donner.

*Méthode : utiliser la compatibilité de l'équivalent avec le produit et le quotient.*

- |                                 |   |                             |
|---------------------------------|---|-----------------------------|
| 1. $f(x) = (x + x^2)e^x$        | 4. $f(x) = \frac{x+1}{x+3}e^x$                          | 6. $f(x) = e^x \ln(x)$      |
| 2. $f(x) = x \ln(x)$            |   | 7. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ |
| 3. $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}$ | 5. $f(x) = \ln\left(\frac{2x^2+2}{x^2-1}\right) \ln(x)$ | 8. $f(x) = x^3 e^x$         |

**Exercice 5 :** Calculer un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

*Méthode : utiliser des équivalents usuels et les règles de calcul sur les équivalents.*

- |  |                                    |  |
|--|------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \ln(1+x)x^2$                | 3. $f(x) = (\sqrt{1+x} - 1)e^{2x}$ | 5. $f(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x^2 \ln(1+x)}$ |
| 2. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x \ln(1+x)}$ | 4. $f(x) = \frac{2x^2}{e^x - 1}$   | 6. $f(x) = \ln(1+x)((1+x)^7 - 1)$            |

**Exercice 6 :** Calculer le développement limité de  $f(x)$  en 0 à l'ordre 2.

- |                         |                            |   |
|-------------------------|----------------------------|---|
| 1. $f(x) = e^x + x^2$   | 4. $f(x) = \ln(1+x) - x$   | 7. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - x$                    |
| 2. $f(x) = e^x - 1 - x$ | 5. $f(x) = x \ln(1+x)$     | 8. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x)$ |
| 3. $f(x) = xe^x - x$    | 6. $f(x) = \ln(1+x) + e^x$ |   |

**Exercice 7 :** Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

*Méthode :* si il n'y a pas de F.I., conclure directement. En cas de F.I. et si une croissance comparée ne suffit pas à conclure, calculer un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . En cas de somme, calculer un DL en 0 pour obtenir l'équivalent.

$$1. f(x) = \frac{e^x + x^2}{1+x} \ln(x)$$

$$4. f(x) = x^4 \ln(1+x)$$

$$7. f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$2. f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$5. f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x}$$

$$8. f(x) = \frac{(e^x - 1) \ln(1+x)}{x^2}$$

$$3. f(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{x}$$

$$6. f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$9. f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$$

**Exercice 8 :** On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \frac{1 - e^x + xe^x}{x^2}$ .
4. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

**Exercice 9 :** On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$ .
4. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

**Exercice 10 :** On définit la fonction  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x \in ] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ ,  $f'(x) = \frac{x - \ln(1+x) - x \ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ .
4. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

**Exercice 11 :** On définit la fonction  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}$ ,  $f'(x) = \frac{\ln(1+x) + x \ln(1+x) - x}{(1+x) \ln(1+x)^2}$ .
4. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

## 2 Réponses courtes

### Réponses de l'exercice 1 :

- |              |              |                  |
|--------------|--------------|------------------|
| 1. $+\infty$ | 4. $-\infty$ | 7. $\frac{1}{2}$ |
| 2. $+\infty$ | 5. $-\infty$ |                  |
| 3. $+\infty$ | 6. $+\infty$ | 8. 1             |

### Réponses de l'exercice 2 :

- |              |              |      |
|--------------|--------------|------|
| 1. $+\infty$ | 4. 0         | 7. 0 |
| 2. $+\infty$ | 5. $+\infty$ |      |
| 3. 0         | 6. 0         | 8. 0 |

### Réponses de l'exercice 3 :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$             | 5. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$        |
| 2. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$          | 6. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2x}$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$          |
| 3. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$             | 7. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$   |
| 4. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)^2$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)^2$ | 8. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^4$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ |

### Réponses de l'exercice 4 :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. Oui, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 e^x$ | 4. Oui, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$           | 7. Oui, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$ |
| 2. Non  | 5. Oui, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2) \ln(x)$ |   |
| 3. Oui, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$     | 6. Non  | 8. Non  |

### Réponses de l'exercice 5 :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$         | 3. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ | 5. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{x^2}$ |
| 2. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ | 4. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$          | 6. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 7x^2$          |

### Réponses de l'exercice 6 :

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ | 4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ | 7. $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ |
| 2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$         | 5. $f(x) = x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$             | 8. $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$                 |
| 3. $f(x) = x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$                    | 6. $f(x) = 1 + 2x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$          |   |

### Réponses de l'exercice 7 :

- |                     |                          |                         |
|---------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1. $f(x) = -\infty$ | 4. $f(x) = 0$            | 7. $f(x) = \frac{1}{2}$ |
| 2. $f(x) = 1$       | 5. $f(x) = 0$            | 8. $f(x) = 1$           |
| 3. $f(x) = 0$       | 6. $f(x) = -\frac{1}{2}$ | 9. $f(x) = 0$           |

### 3 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

Correction détaillée de l'exercice 2 :

Correction détaillée de l'exercice 3 :

Correction détaillée de l'exercice 4 :

Correction détaillée de l'exercice 5 :

Correction détaillée de l'exercice 6 :

Correction détaillée de l'exercice 7 :

Correction détaillée de l'exercice 8 :

1. La fonction  $f$  est de la forme  $f = \frac{f_1}{f_2}$  où :

- $f_1 : x \mapsto e^x - 1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$
- $f_2 : x \mapsto x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

2. On sait que  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ . On en déduit que  $f$  est continue en 0.

3. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} \\ &= \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \end{aligned}$$

Or,  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc  $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  ce qui permet de conclure que

$$e^x - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$  et donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} \\ &= \frac{1 - e^x + xe^x}{x^2} \end{aligned}$$

4.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc

$$\begin{aligned} 1 - e^x + xe^x &= 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) + x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) + x + x^2 \\ &= \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$1 - e^x + xe^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$ . On en déduit que  $f'$  est continue en 0 et donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

### Correction détaillée de l'exercice 9 :

1. La fonction  $f$  est de la forme  $f = \frac{f_1}{f_2}$  où :

- $f_1 : x \mapsto x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$
- $f_2 : x \mapsto e^x - 1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

2. On sait que  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ . On en déduit que  $f$  est continue en 0.
3. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} \\ &= \frac{x - (e^x - 1)}{x(e^x - 1)} \\ &= \frac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)} \end{aligned}$$

Or,  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc  $1 + x - e^x = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  ce qui permet de conclure que

$$1 + x - e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

De plus,  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$  et donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

4.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc

$$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) - 1 - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - x - x^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$e^x - 1 - xe^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$ . On en déduit que  $f'$  est continue en 0 et donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

### Correction détaillée de l'exercice 10 :

1. La fonction  $f$  est de la forme  $f = \frac{f_1}{f_2}$  où :

- $f_1 : x \mapsto \ln(1+x)$  est de la forme  $f_1 = \ln \circ g$  où
  - $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$
  - $g : x \mapsto 1+x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$  car polynomiale et vérifie  $g(] -1, +\infty[\setminus\{0\}) \subset ]0, +\infty[$
- $f_2 : x \mapsto x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$ .

2. On sait que  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ . On en déduit que  $f$  est continue en 0.

3. (a) Soit  $x \in ] -1, +\infty[\setminus\{0\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} \end{aligned}$$

- Tout d'abord,  $x \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ .
- Ensuite,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc  $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  ce qui permet de conclure que

$$\ln(1+x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$  et donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .



(b) Soit  $x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} \\ &= \frac{x - \ln(1+x) - x\ln(1+x)}{(1+x)x^2} \end{aligned}$$

4. • Tout d'abord,

$$(1+x)x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

• Ensuite,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc

$$\begin{aligned} x - \ln(1+x) - x\ln(1+x) &= x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) - x\left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - x^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$x - \ln(1+x) - x\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$ . On en déduit que  $f'$  est continue en 0 et donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.

### Correction détaillée de l'exercice 11 :

1. La fonction  $f$  est de la forme  $f = \frac{f_1}{f_2}$  où :

- $f_1 : x \mapsto x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$  car polynomiale
  - $f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$  est de la forme  $f_2 = \ln \circ g$  où
    - $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$
    - $g : x \mapsto 1+x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$  car polynomiale et vérifie  $g(] -1, +\infty[\setminus\{0\}) \subset ]0, +\infty[\setminus\{1\}$
- et  $f_2$  ne s'annule pas sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$ .

2. On sait que  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ . On en déduit que  $f$  est continue en 0.

3. (a) Soit  $x \in ] -1, +\infty[\setminus\{0\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \end{aligned}$$

• Tout d'abord,  $x \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ .

- Ensuite,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc  $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  ce qui permet de conclure que

$$x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$  et donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

(b) Soit  $x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln(1+x) - x \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)^2} \\ &= \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{1+x} \frac{1}{\ln(1+x)^2} \\ &= \frac{\ln(1+x) + x \ln(1+x) - x}{(1+x)\ln(1+x)^2} \end{aligned}$$

4. • Tout d'abord,  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc

$$(1+x)\ln(1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

- Ensuite,  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  donc

$$\begin{aligned} \ln(1+x) + x \ln(1+x) - x &= x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - x \\ &= \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\ln(1+x) + x \ln(1+x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$ . On en déduit que  $f'$  est continue en 0 et donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.