Rappels de cours

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

- La fonction de répartition de U est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

- La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  est une densité de U.

1 Exercices

Exercice 1 : Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$.

1. Expliciter la fonction de répartition de U ainsi qu'une densité de U.
2. Déterminer la fonction de répartition de $X = |U|$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Y = U^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
4. Montrer que $Z = \lfloor U \rfloor$ est une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de Z.

Exercice 2 : Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,2])$.

1. Expliciter la fonction de répartition de U ainsi qu'une densité de U.
2. Déterminer la fonction de répartition de $X = |U|$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Y = U^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
4. Montrer que $Z = \lfloor U \rfloor$ est une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de Z.

Exercice 3 : Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,-1])$.

1. Expliciter la fonction de répartition de U ainsi qu'une densité de U.
2. Déterminer la fonction de répartition de $X = |U|$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Y = U^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
4. Montrer que $Z = \lfloor U \rfloor$ est une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de Z.

Exercice 4 : Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,2])$.

1. Expliciter la fonction de répartition de U ainsi qu'une densité de U.
2. Déterminer la fonction de répartition de $Y = U^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
3. Montrer que $Z = \lfloor U \rfloor$ est une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de Z.

2 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. La fonction de répartition de U est la fonction

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Une densité de U est donnée par la fonction

$$f_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. $X(\Omega) = [0,1]$ et

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et une densité de X est donnée par la fonction

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. $Y(\Omega) = [0,1]$ et

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Une densité de Y est donnée par la fonction

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. $Z(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

$$\mathbb{P}([Z=-1]) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}([Z=0]) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}([Z=1]) = 0$$

Réponses de l'exercice 2 :

1. La fonction de répartition de U est la fonction

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Une densité de U est donnée par la fonction

$$f_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. $X(\Omega) = [0,2]$ et
$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
Une densité de X est donnée par la fonction
$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3. $Y(\Omega) = [0,4]$ et
$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2\sqrt{x}}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x}+1}{3} & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$
Une densité de Y est donnée par la fonction
$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

4. $Z(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$.
$$\mathbb{P}([Z=-1]) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}([Z=0]) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}([Z=1]) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}([Z=2]) = 0$$

3 Corrections détaillées