Colles de Mathématiques en E2A
Intégration, systèmes différentiels linéaires
Semaine 15 : 8-12 janvier

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XI : Intégration

1.1 Définitions

- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle I.
- Intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction continue.
- Intégrale impropre d'une fonction continue f sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Intégrale doublement impropre d'une fonction continue f sur $\mathbb{R}$. Notion de convergence / divergence de ces intégrales impropres. Valeur d'une intégrale impropre en cas de convergence.
- Les intégrales impropres en un point fini sont `HORS-PROGRAMME`.
- Intégrale impropre absolument convergente.

1.2 Résultats

- Existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle. Une primitive d'une fonction continue est toujours de classe $\mathcal{C}^1$.
- Formule fondamentale :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\,F(t)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

  si F est une primitive de f sur $[a, b]$.
- Le tableau des primitives usuelles doit être connu.
- Intégration par parties sur un segment (u et v doivent être de classe C^1).
- Changement de variable sur un segment (la fonction φ doit être de classe C^1). Tout changement de variable non affine doit être donné aux élèves.
- Critère de Riemann au voisinage de $+\infty$. Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence.
- Condition de convergence pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$. Calcul de cette intégrale dans le cas convergent. Ces intégrales sont des intégrales de référence.

- Propriétés générales : relation de Chasles, linéarité, croissance de l'intégrale (avec les bornes rangées dans l'ordre croissant).
- Caractérisation de la convergence des intégrales impropres de fonctions continues et positives via la majoration de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ ou de la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ (peu utilisée).
- Critères de convergence des intégrales impropres de fonctions continues et positives : par comparaison, par négligeabilité, par équivalence (très souvent utilisées).
- Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.
- Méthode pour faire une comparaison série-intégrale. Dessin des différentes aires jouant un rôle à avoir en tête.

1.3 Méthodes

1. Il faut savoir dériver la fonction
$$H : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$$
La méthode est de passer par une primitive de f. On trouve alors
$$H'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$
2. Etude de l'objet $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   (a) On rappelle que f est continue sur $[a, +\infty[$ donc $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $+\infty$.
   (b) On prend $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\int_a^B f(t)\ \mathrm{d}t$ (intégrale sur le segment $[a, B]$ d'une fonction continue sur $[a, B]$, ce n'est pas une intégrale impropre) admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
   (c) Si c'est le cas, on conclut que $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.
3. Etude de l'objet $\int_{-\infty}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est continue sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.
   (a) On rappelle que f est continue sur $]-\infty, b]$ donc $\int_{-\infty}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $-\infty$.
   (b) On prend $A \in]-\infty, b]$ et on étudie si $\int_A^b f(t)\ \mathrm{d}t$ (intégrale sur le segment $[A, b]$ d'une fonction continue sur $[A, b]$, ce n'est pas une intégrale impropre) admet une limite finie lorsque $A \to -\infty$.
   (c) Si c'est le cas, on conclut que $\int_{-\infty}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.
4. Etude de l'objet $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) On rappelle que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) On choisit un nombre $c \in]-\infty, +\infty[$ le plus simple possible (0 en général).
   (c) On étudie séparément les intégrales impropres $\int_{-\infty}^c f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ en utilisant les méthodes précédentes.

(d) Si ces deux intégrales convergent, alors on conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

5. Si la formule de $f(t)$ est donnée par disjonction de cas sur la valeur de t (f définie par morceaux), alors on pensera à utiliser la relation de Chasles pour découper l'intégrale en plusieurs bouts calculables.
6. Pour utiliser la croissance de l'intégrale, on commence par minorer/majorer/encadrer l'intégrande puis on intègre. Attention à bien introduire les variables. Souvent, on doit introduire une variable t pour encadrer l'intégrande, mais une fois l'intégration faite, ce t devient une variable muette. Attention également à bien vérifier que les bornes sont rangées dans l'ordre croissant.
7. Pour utiliser les critères de comparaison, c'est pareil. On compare `TOUJOURS` les intégrandes. C'est seulement en second lieu que l'on dit des choses sur les intégrales (c'est analogue aux critères de comparaisons pour les SATP). Il ne faut pas confondre $f(t)$ et $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.

2 Chapitre XII : Systèmes différentiels linéaires

2.1 Définitions

- Equation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 et d'ordre 2.
- Notion d'équation homogène et d'équation avec second membre.
- Problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2.
- Système différentiel linéaire à coefficients constants. Point de vue matriciel.
- Notion de point d'équilibre (ou d'état d'équilibre ou de solution stationnaire).
- Trajectoire d'un système différentiel. Notion de trajectoire convergente / divergente.

2.2 Résultats

- Principe de superposition.
- Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
- Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
- Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2. Traduction du problème de Cauchy dans ce cas.

2.3 Méthodes

- Résolution des équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Recherche d'une solution particulière lorsqu'il y a un second membre. (La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée pour les équations différentielles d'ordre 2)
- Pour montrer que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ est divergente, il suffit de trouver une coordonnée x_i qui vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = +\infty$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = -\infty$.
- Résolution des systèmes différentiels linéaires diagonaux par résolutions indépendantes de toutes les équations différentielles homogènes d'ordre 1. Différenciation des constantes pour chacune des équations différentielles.
- Résolution des systèmes différentiels linéaires triangulaires supérieurs (ou inférieurs) par remontées successives. Gestion des constantes C_3, C_2 et C_1 en cascade (pour un système 3×3).

- Pour déterminer les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable, il faut déterminer le spectre de A puis une base de chacun de ses sous-espaces propres. C'est le même travail à faire que pour diagonaliser A. On peut ensuite utiliser la formule du cours.
- Résoudre un problème de Cauchy revient en pratique à déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base. On est ainsi ramené à résoudre un système linéaire avec second membre.
- Pour résoudre le système différentiel $X' = AX$, on sera souvent amené à faire un changement de variable en posant $Y = P^{-1}X$ où P est une matrice inversible. En posant $T = P^{-1}AP$, il faut savoir démontrer :
$$X' = AX \iff Y' = TY$$
Il faut ensuite savoir résoudre le système différentiel $Y' = TY$ pour en déduire les solutions de $X' = AX$ en se souvenant que $X = PY$. Le calcul de P^{-1} est inutile et il ne faut donc pas le faire si il n'est pas demandé.

3 Chapitre XIII : v.a.r. à densité

Seulement en question de cours cette semaine.

4 Questions de cours

1. Donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$.
2. Donner la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{10}}\, dt$.
3. Résoudre $y' + 4y = te^{-4t}$.
4. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = t$.
5. Résoudre le système différentiel
$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & x & + & y \\ y' & = & & & y \end{array} \right.$$
6. Soit X une variable aléatoire.
   (a) Donner la définition de F_X. Comment s'appelle cet objet ?
   (b) Donner la définition de « X est une variable aléatoire à densité ».
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Citer les trois conditions à vérifier pour pouvoir affirmer que « f est une densité de probabilité ».