Colles de Mathématiques en E2A
Systèmes différentiels linéaires, v.a.r. à densité
Semaine 16 : 15-19 janvier

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XII : Systèmes différentiels linéaires

1.1 Définitions

- Equation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 et d'ordre 2.
- Notion d'équation homogène et d'équation avec second membre.
- Problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2.
- Système différentiel linéaire à coefficients constants. Point de vue matriciel.
- Notion de point d'équilibre (ou d'état d'équilibre ou de solution stationnaire).
- Trajectoire d'un système différentiel. Notion de trajectoire convergente / divergente.

1.2 Résultats

- Principe de superposition.
- Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
- Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
- Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2. Traduction du problème de Cauchy dans ce cas.

1.3 Méthodes

- Résolution des équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Recherche d'une solution particulière lorsqu'il y a un second membre. (La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée pour les équations différentielles d'ordre 2)

- Pour montrer que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ est divergente, il suffit de trouver une coordonnée x_i qui vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = +\infty$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = -\infty$.
- Résolution des systèmes différentiels linéaires diagonaux par résolutions indépendantes de toutes les équations différentielles homogènes d'ordre 1. Différenciation des constantes pour chacune des équations différentielles.
- Résolution des systèmes différentiels linéaires triangulaires supérieurs (ou inférieurs) par remontées successives. Gestion des constantes C_3, C_2 et C_1 en cascade (pour un système 3×3).
- Pour déterminer les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable, il faut déterminer le spectre de A puis une base de chacun de ses sous-espaces propres. C'est le même travail à faire que pour diagonaliser A. On peut ensuite utiliser la formule du cours.
- Résoudre un problème de Cauchy revient en pratique à déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base. On est ainsi ramené à résoudre un système linéaire avec second membre.
- Pour résoudre le système différentiel $X' = AX$, on sera souvent amené à faire un changement de variable en posant $Y = P^{-1}X$ où P est une matrice inversible. En posant $T = P^{-1}AP$, il faut savoir démontrer :
$$X' = AX \iff Y' = TY$$
Il faut ensuite savoir résoudre le système différentiel $Y' = TY$ pour en déduire les solutions de $X' = AX$ en se souvenant que $X = PY$. Le calcul de P^{-1} est inutile et il ne faut donc pas le faire si il n'est pas demandé.

2 Chapitre XIII : v.a.r. à densité

Il y a un gros effort à fournir sur ce chapitre pour réussir à manipuler les fonctions définies par morceaux :

- Savoir calculer leurs intégrales.
- Savoir trouver des formules quand on les compose avec d'autres fonctions (utile pour calculer des fonctions de répartition de transformée de v.a.r.).

Formulaire des lois usuelles à connaître par coeur pour les lois uniformes et exponentielles.

(on ajoutera les lois normales la semaine suivante)

2.1 Définitions

- Fonction de répartition d'une v.a.r. (rappel).
- Trois définitions différentes à ne pas confondre :
  1. X est une v.a.r. à densité.
  2. f est une densité de X, où X est une v.a.r. à densité.
  3. f est une densité de probabilité.
- Espérance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$.

  (les moments d'ordre r et la variance n'ont pas été vus, on les gardera pour la semaine prochaine)

2.2 Résultats

- Si X est à densité : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$.
- Calcul de probabilités à l'aide d'une fonction de répartition pour une v.a.r. à densité :

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \end{aligned}$$

- Formule fondamentale (calcul de la fonction de répartition à l'aide d'une densité) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F_X(x) \;=\; \mathbb{P}([X \leq x]) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

  et ses conséquences (autres formules du théorème).
- La transformée affine d'une v.a.r. à densité est une v.a.r. à densité (à savoir redémontrer).
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme est encore une v.a.r. qui suit une loi uniforme (à savoir redémontrer).

2.3 Méthodes

On renvoie aux détails du cours pour la marche à suivre. Il faut maîtriser les méthodes suivantes (et les schémas de rédaction qui vont avec) :

1. Montrer qu'une v.a.r. X est une v.a.r. à densité via sa fonction de répartition (très important).
2. Déterminer une densité à partir de la fonction de répartition (très important).
3. Déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité (très important).
4. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité (très important).
5. Montrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition (peu important, à ne travailler que quand tout le reste est compris et maîtrisé).

De nombreux exercices font travailler sur des transformées de v.a.r. à densité. Il faut maîtriser les techniques vues en cours dans les exemples suivants :

1. Transformation affine : $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$.
2. Transformation au carré : $Y = X^2$.
3. Transformation exponentielle : $Y = \mathrm{e}^X$.
4. Transformation usuelle : $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$ et $\lambda > 0$.
5. Transformation via la valeur absolue : $Y = |X|$ (penser à la formule des probabilités totales dès que l'on doit séparer des cas). *(plus difficile)*
6. Transformation via la partie entière : $Y = \lfloor X \rfloor$ (on obtient alors une v.a.r. discrète).
7. Minimum et maximum de plusieurs v.a.r. indépendantes de même loi : $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Il faut connaître par cœur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. définie à l'aide d'autres v.a.r. admet une espérance :

1. Si par exemple $Z = 2X + 5$, on écrira : la v.a.r. Z admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
2. Si par exemple $Z = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, on écrira : la v.a.r. Z admet une espérance en tant que somme / combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.

Il faut également connaître par coeur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. admet une espérance / variance à l'aide d'une densité :

1. La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

2. La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment. *(la variance n'a pas encore était faite en cours)*

3 Questions de cours

1. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que X est une v.a.r. à densité puis déterminer une densité de X.

2. On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \mathrm{e}^{2x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité.

4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$?

5. Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1,2])$. On note $Y = -3X + 2$.
Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y puis reconnaître la loi de Y.

6. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. Vérifier que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f. La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.