Colles de Mathématiques en E2A
v.a.r. à densité, fonctions de deux variables
Semaine 18 : 29 janvier - 2 février

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XIII : v.a.r. à densité

Il y a un gros effort à fournir sur ce chapitre pour réussir à manipuler les fonctions définies par morceaux :

- Savoir calculer leurs intégrales.
- Savoir trouver des formules quand on les compose avec d'autres fonctions (utile pour calculer des fonctions de répartition de transformée de v.a.r.).

Formulaire des lois usuelles à connaître par coeur.

1.1 Définitions

- Fonction de répartition d'une v.a.r. (rappel).
- Trois définitions différentes à ne pas confondre :
  1. X est une v.a.r. à densité.
  2. f est une densité de X, où X est une v.a.r. à densité.
  3. f est une densité de probabilité.
- Espérance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$.
- Moment d'ordre 2 d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$ et, plus généralement, moments d'ordre r.
- Variance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)$.
- Variable à densité centrée et réduite.
- Lois uniformes sur un intervalle borné.
- Lois exponentielles.
- Lois normales (et en particulier la loi normale centrée réduite).

1.2 Résultats

- Si X est à densité : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$.
- Calcul de probabilités à l'aide d'une fonction de répartition pour une v.a.r. à densité :

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \end{aligned}$$

- Formule fondamentale (calcul de la fonction de répartition à l'aide d'une densité) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

  et ses conséquences (autres formules du théorème).
- La transformée affine d'une v.a.r. à densité est une v.a.r. à densité (à savoir redémontrer).
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme est encore une v.a.r. qui suit une loi uniforme (à savoir redémontrer).
- Théorème de transfert.
- Propriétés de l'espérance et de la variance.
- Formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale est encore une v.a.r. qui suit une loi normale.
- La somme de v.a.r. indépendantes qui suivent des lois normales est encore une v.a.r. qui suit une loi normale. *Il faut savoir retrouver les paramètres de cette loi.*

1.3 Méthodes

On renvoie aux détails du cours pour la marche à suivre. Il faut maîtriser les méthodes suivantes (et les schémas de rédaction qui vont avec) :

1. Montrer qu'une v.a.r. X est une v.a.r. à densité via sa fonction de répartition (très important).
2. Déterminer une densité à partir de la fonction de répartition (très important).
3. Déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité (très important).
4. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité (très important).
5. Montrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition (peu important, à ne travailler que quand tout le reste est compris et maîtrisé).

De nombreux exercices font travailler sur des transformées de v.a.r. à densité. Il faut maîtriser les techniques vues en cours dans les exemples suivants :

1. Transformation affine : $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$.
2. Transformation au carré : $Y = X^2$.
3. Transformation exponentielle : $Y = \mathrm{e}^X$.
4. Transformation usuelle : $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$.
5. Transformation via la valeur absolue : $Y = |X|$ (penser à la formule des probabilités totales dès que l'on doit séparer des cas). *(plus difficile)*
6. Transformation via la partie entière : $Y = \lfloor X \rfloor$ (on obtient alors une v.a.r. discrète).

7. Minimum et maximum de plusieurs v.a.r. indépendantes de même loi : $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
8. Somme de deux v.a.r. à densité (hors programme et plus difficile, il faut donner le résultat de convolution si on veut poser un exo dessus) : $Y = U + V$.

Il faut connaître par cœur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. définie à l'aide d'autres v.a.r. admet une espérance :

1. Si par exemple $Z = 2X + 5$, on écrira : la v.a.r. Z admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
2. Si par exemple $Z = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, on écrira : la v.a.r. Z admet une espérance en tant que somme / combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.

Il faut également connaître par cœur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. admet une espérance / variance à l'aide d'une densité :

1. La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.
2. La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

2 Chapitre XIV : Fonctions de deux variables

L'objet de ce chapitre est de fournir des outils pour trouver les extrema locaux d'une fonction de deux variables. Les résultats doivent être pensés comme des généralisations de ceux connus pour les fonctions d'une variable. La grosse différence entre les fonctions d'une variable et les fonctions de deux variables, c'est qu'on ne peut plus utiliser les concepts de croissance ou de décroissance pour les fonctions de deux variables. Adieu donc les tableaux de variations pour ces fonctions, qui nous permettaient de visualiser (et trouver) facilement les extrema.

2.1 Définitions

- Vocabulaire de topologie : distance euclidienne, boule ouverte, boule fermée, partie bornée, partie fermée, partie ouverte. Aucune preuve n'est exigible. L'énoncé doit donner la nature d'une partie de $\mathbb{R}^2$. Ce vocabulaire est uniquement introduit pour pouvoir formuler correctement les théorèmes du cours, mais aucune question ne doit porter dessus excepté une éventuelle représentation graphique d'un ouvert U très simple (cf exemples du cours).
- Graphe et lignes de niveaux d'une fonction de deux variables.
- Fonction de deux variables continue / de classe $\mathcal{C}^1$ / de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.
- Dérivées partielles d'ordre 1 : $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$. Gradient de f. Notion de point critique. DL à l'ordre 1.

2.2 Résultats

- Stabilité de la classe C^0 (applications continues), C^1 ou C^2 par opérations algébriques et par composition.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

2.3 Méthodes

- Il faut savoir déterminer les points critiques de f en raisonnant par équivalence.

3 Questions de cours

1. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Montrer que X est une v.a.r. à densité puis déterminer une densité de X.

2. On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha e^{2x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
   Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité.
4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$?
5. Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1,2])$. On note $Y = -3X + 2$.
   Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y puis reconnaître la loi de Y.
6. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. Vérifier que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f. La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. La v.a.r. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.
7. Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance non nulle. Rappeler l'expression de X^* et montrer que X^* est centrée et réduite.
8. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
9. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
10. Calculer $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$ lorsque $f : (x,y) \mapsto xye^{-y^2}$ et lorsque $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy^2$.