Exercices de cours

Exercice 1 : Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + e^{2y} - 2e^y$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Montrer que f admet un unique point critique, que l'on déterminera. On le note (x_0, y_0).
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Est-ce que f admet un extremum local au point (x_0, y_0) ?
4. Développer l'expression $(x + y - 1)^2 + (e^y - 1)^2$. Que peut-on en déduire sur le point (x_0, y_0) ?

Exercice 2 :`(EDHEC 2021)` Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Déterminer les points critiques de f.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.
6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
   (a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   (c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^\alpha$.

Exercice 3 : On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction f de deux variables réelles x et y définie par

$$f(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x).$$

1. Étudier les variations de g et donner les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déduire des variations de g l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $g(\alpha) = 0$ (on rappelle que $e \approx 2,7$).
3. Déterminer le seul point critique de f.
4. Vérifier que f présente un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
5. L'extremum trouvé est-il global ?

Exercice 4 :(EML 2020) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ définie sur $]0,1[$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in \,]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$
   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.
3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.
8. Déterminer u_1 et u_2.
9. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ définie par :

$$F : (x,y) \mapsto x^2\,y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

10. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x,y) de $]0,+\infty[^2$.
    (b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_3) définie sans la partie **B**.
11. (a) Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (u_3, u_3^2).
    (b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\lambda_1\,\lambda_2 \;=\; -6u_3^2 - 2$$

12. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

Exercice 5 :(EML 2014) On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,e^{\frac{1}{x}}$.
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geq e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[,\ \varphi(x) \geq e\,x$.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
   Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R}\times\ ]0,+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.
9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).
10. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1,e)$.
12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1,e)$?
13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3\,e^n$.
    (on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)
15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
16. Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.
17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 6 :(ECRICOME 2019)

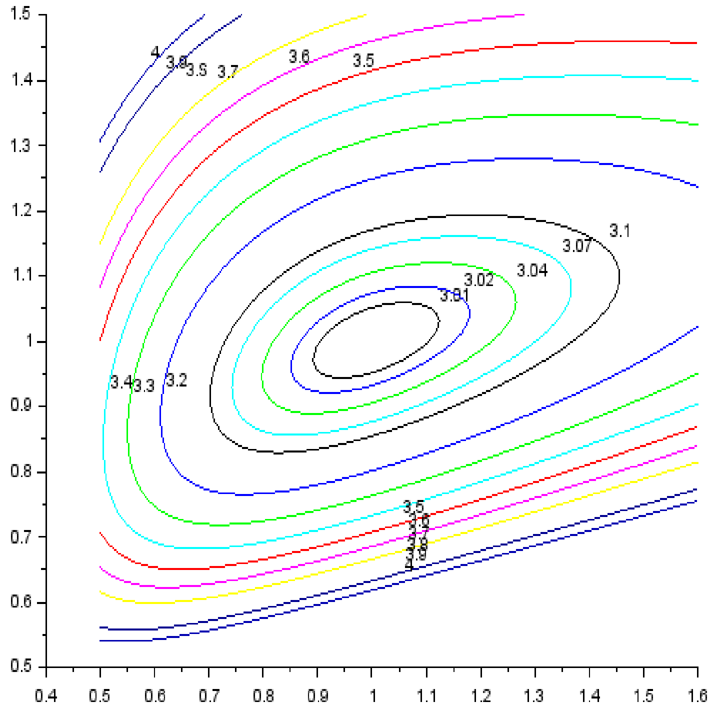
On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f. Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. On utilise Scilab pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. (a) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

   (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

   (d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

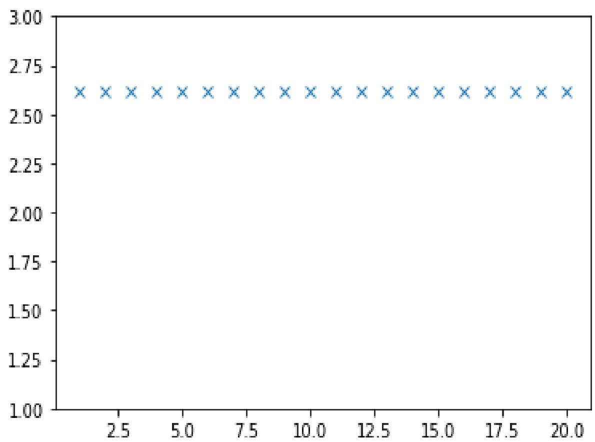
3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
4. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
5. (a) Démontrer :
$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geq 4$.
   (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
6. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geq 1$.
   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
   (c) Déterminer la limite de (v_n).
7. (a) Montrer : $\forall n \geq 1,\ v_n \leq 3$.
   (b) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def h(n,x):` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.
   (c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def Approxv(n):
    a = 1
    b = 3
    while (b-a) > 10**(-5):
        c = (a+b)/2
        if h(n,c) < 4 :
            ........
        else :
            ........
    ..........
```

   (d) À la suite de la fonction `Approxv`, on écrit le code suivant :

```
X = np.arange(1,21)
Y = np.zeros(20)
for k in range(20):
    Y[k] = Approxv(k+1)**(k+1)
plt.plot(X,Y,'x')
axes = plt.gca()
axes.set_ylim([1, 3])
```

   À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

(e) Montrer : $\forall n \geq 1,\ (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 7.c).

Exercice 7 :(EML 2019) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\ \to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.
   (c) Soit $y \in [2,+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in\ ]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x,y) de U.
5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer :
$$(x,y) \text{ est un point critique de } h \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$
6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).
7. (a) Vérifier : $\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   (b) En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Exercices supplémentaires

Exercice 8 : Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U proposé, et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

1. f définie par $f(x,y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
2. f définie par $f(x,y) = (x+y)(1-2x-2y)$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
3. f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;
4. f définie par $f(x,y) = x\,(\ln(x) + x + y^2)$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;
5. f définie par $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
6. f définie par $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$ sur $U = \,]0,+\infty[\, \times \,]1,+\infty[$;
7. f définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$ sur $U = \mathbb{R}^2$.

Exercice 9 :`(EML 2015)` On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1, \quad \text{pour tout réel } x.$$

1. Dresser le tableau de variations de ϕ en précisant la valeur de ϕ en 0 et les limites en $-+\infty$ et $+\infty$.
2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x > 0$, possède une unique solution, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]1/2, 1[$.

On considère l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et la fonction g définie sur U par

$$g(x,y) = \frac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y, \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } U.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.
2. Calculer les dérivées premières de g sur U.
3. Montrer que g admet deux, et seulement deux, points critiques qui sont $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$.
4. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha,0)$?
5. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha,-2)$?
6. Est-ce g admet un extremum global sur U ?

Exercice 10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x)}{y^2+1} - \sqrt{xy}$$

1. Expliciter les applications partielles de f en $(2,1)$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, puis que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.

Exercice 12 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. Déterminer l'unique point (a,b) en lequel f est susceptible de présenter un extremum local.
3. Prouver que f atteint un minimum en (a,b).
4. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $5\left(x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5}(y-2)^2$. En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

Exercice 13 :*(d'après* `INSEEC 2002`*)*
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 4yz$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x,y,y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z = y^2$.

1. Expliciter $f(x,y)$, et calculer :
$$\partial_1(f)(x,y),\ \partial_2(f)(x,y),\ \partial_1^2(f)(x,y),\ \partial_{12}^2(f)(x,y) \text{ et } \partial_2^2(f)(x,y)$$
2. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = 4\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2$.
En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.
4. Montrer que f présente un minimum local en $(-2,2)$.
5. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.
En déduire le développement limité d'ordre 2 de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 + h\right)$ et de $f\left(-\frac{1}{2} + h, 1 - h\right)$, lorsque h est au voisinage de 0. En déduire que f ne présente pas d'extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercice 14 :*(d'après* `EDHEC 2005`*)*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x,y) = x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f.
(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1,0)$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
(b) Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
4. (a) Montrer que : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x,y) \geq x\,\mathrm{e}^x$.
(b) En étudiant la fonction $g : x \mapsto x\ \mathrm{e}^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 3.b. est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 :*(d'après* `EDHEC 2006`*)*
Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
(b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
(b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.
(b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y.$$

(a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geq -\dfrac{1}{6}$.

(b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 16 : *(d'après* `ESC 2005`*)*
On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\, \times\,]0;+\infty[$ par :

$$f(x,y) = x^2\ln(y) - y\ln(x)$$

1. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$.
   (a) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.
   (b) Étudier les variations de g' sur $]0;+\infty[$, puis celle de g sur $]0;+\infty[$.
   (On précisera à chaque fois les limites aux bornes)
   (c) En déduire qu'il existe un unique élément strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
   (d) Vérifier que : $\ln(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}$.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (c) En déduire que si (x_0,y_0) est un point critique de f, alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln(x_0)}$.
   (d) Établir alors que $g(\ln(x_0)) = 0$.
   En déduire que f possède un unique point critique noté M, de coordonnées $\left(e^{\alpha}, \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ où α est le réel défini au 1.c.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) En utilisant la relation de la question 1.d), montrer que :

$$2\ln(y_0) + \frac{y_0}{(x_0)^2} = \frac{2}{\alpha}$$

   En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

Exercice 17 : *(d'après* `ESCP 2002 - Maths III` *)*
Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x,y)$ en fonction de x, y et a.
2. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles.
   Calculer $F_a(x_0,y_0)$.
4. Calculer, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$$

   et préciser son signe.
5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$.
   Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.
6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice 18 :(d'après `EML 1997`)
On considère la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-2xy+2y^2+\mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x}=x$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, admet une solution et une seule, qu'on notera par la suite x_0.
2. Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.
3. (a) Écrire la matrice hessienne, notée H, de f au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.
   (b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :
   $$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 6+x_0 \\ \lambda_1\,\lambda_2 &= 4+4\,x_0 \end{cases}$$
   (c) La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$?

Exercice 19 :*(d'après* `ECRICOME 2009`*)*
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x)=2\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall\,(x,y)\in\,]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[\,,\ f(x,y)=\mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy)$$

Étude des zéros de φ

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2)\simeq 0,7$.
   Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
   $$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0 \ \text{ avec } 0<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$$
6. Proposer un programme en **Python** permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

Extrema de f sur $]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs :
   $$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y)=f(x,y)+\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\[2ex] \partial_2(f)(x,y)=4f(x,y)+\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$
3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$ et établir que :
   $$\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \partial^2_{2,2}(f)\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \partial^2_{2,1}(f)\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=\dfrac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$

5. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$?
   Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum).
6. De même, f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$?

Exercice 20 :*(d'après* `EML 2017`*)*
On considère la fonction $f:\,]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7<\mathrm{e}<2,8 \qquad 7,3<\mathrm{e}^2<7,4 \qquad 0,6<\ln(2)<0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. (a) Étudier les variations de la fonction $u:\left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x)-x \end{array}\right.$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x)=x$, d'inconnue $x\in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1<\alpha<2$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F:\,]1,+\infty[^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1,\infty[^2$, par :

$$F(x,y)=f(x)+f(y)-xy.$$

1. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.
2. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).
   (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ?
   Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Exercice 21 :*(d'après* `EML 2018`*)*
Dans tout cet exo, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ f(x)=x-\ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=2$, d'inconnue $x\in\,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0<a<1<b$.
3. Montrer : $b\in[2,4]$. On donne : $\ln(2)\simeq 0,7$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x,y) de U.

   (b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a,\ln(a))$ et $(b,\ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.

2. (a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a,\ln(a))$.

   (b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1\,\lambda_2 & = & a-1 \end{cases}$$

   (c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a,\ln(a))$?

3. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b,\ln(b))$?