

TP13 : Chaînes de Markov

I. Notion de chaîne de Markov : illustration sur un exemple

I.1. Énoncé du problème

Doudou le hamster passe son temps entre ses trois activités favorites : dormir, manger et faire de la roue. Au début de la journée, il mange, et à chaque heure, il change d'activité selon les critères suivants.

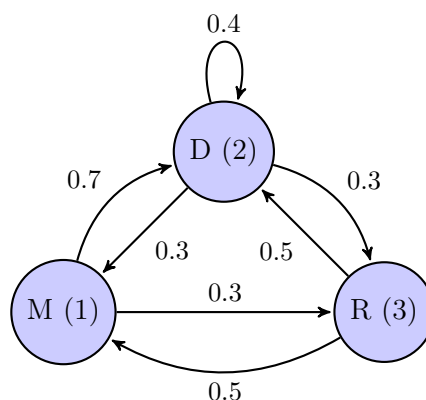
- 1) Si, à l'heure n , il est en train de manger, alors il va dormir l'heure suivante avec probabilité 0.7 et faire de l'exercice avec probabilité 0.3.
- 2) Si, à l'heure n , il est en train de dormir, alors il continue à dormir l'heure $n + 1$ avec probabilité 0.4, il va manger avec probabilité 0.3 et il va faire de l'exercice avec probabilité 0.3.
- 3) Si, à l'heure n , il est en train de faire de la roue, il va manger l'heure suivante avec probabilité 0.5 et il va dormir avec probabilité 0.5.

On s'intéresse ici à l'évolution du comportement de Doudou. On souhaite notamment déterminer si l'une de ses activités prendra, à terme, le dessus sur les autres.

I.2. Modélisation mathématique

On modélise ce problème comme suit.

- On commence par numéroter les activités par un entier entre 1 et 3. Plus précisément,
 - × Manger sera l'activité 1
 - × Dormir sera l'activité 2
 - × Faire de la roue sera l'activité 3
- On note X_n la v.a.r. égale à l'état du hamster à l'heure n . Ainsi, la suite de v.a.r. (X_n) représente l'évolution des activités du hamster.
- Cette évolution peut être modélisée par le graphe suivant.



- On définit enfin la **matrice de transition** A associée au problème. Il s'agit de la matrice :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad \text{où} \quad a_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$$

$(a_{i,j})$ représente la probabilité de passage de l'état i à l'état j

I.3. Étude de la matrice de transition

- Soit $(i_0, \dots, i_n, i_{n+1}) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^{n+2}$. Que vaut $\mathbb{P}_{[X_0=i_0] \cap \dots \cap [X_n=i_n]}([X_{n+1} = i_{n+1}])$?

Cette propriété est appelée **propriété de Markov**.

On la retient souvent par la phrase :

Le futur (la position X_{n+1} à l'instant $n + 1$) ne dépend du passé (positions X_0, \dots, X_n) que par le présent (la position X_n à l'instant n).

- Donner une expression de $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$ qui ne dépende pas de n .

- Déterminer la matrice de transition A du problème précédent.
Écrire l'appel permettant de la stocker dans une variable A .

- Les coefficients de la matrice A ne dépendent pas de n . Comment appelle-t-on une telle chaîne de Markov ?

Remarque

- Il est classique de faire l'étude d'une grandeur aléatoire qui varie dans le temps discret. Par exemple, on peut étudier :
 - × l'évolution du prix d'une action jour après jour,
 - × l'évolution du gain d'un joueur après chaque partie d'un jeu,
 - × le déplacement d'un mobile (d'une puce) sur les sommets d'un triangle / carré (ou sur un axe gradué),
 - × ...
 Lorsque l'évolution se fait de sorte que l'état à un instant ne dépend que de l'état à l'instant précédent, on est dans le cadre des chaînes de Markov.
- Il est fréquent de voir ce type d'étude aux concours. Comme on va le voir, cela permet de faire un sujet qui mêle les résultats des chapitres Probabilités (FPT, sce) et Algèbre Linéaire (étude d'une matrice et des ses puissances).

I.4. Lien entre la matrice de transition et la loi de X_n

- Rappeler $X_n(\Omega)$.

Dans la suite, on considère le vecteur ligne V_n qui définit la loi de X_n (n^{e} état de la chaîne) :

$$V_n = (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]))$$

- Déterminer la probabilité $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$ en fonction de $\mathbb{P}([X_n = 1])$, $\mathbb{P}([X_n = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 3])$ et des coefficients de la matrice A .

- Déterminer de même $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_{n+1} = 3])$.

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n A$. Exprimer enfin V_n en fonction de A et de V_0 .

- Comment modéliser le fait que le hamster est initialement en train de manger ? Comment obtient-on V_n dans ce cas ?

- Rappeler la commande **Python** qui permet de calculer A^n .

- ▶ Déterminer A^5 , A^{10} et A^{20} à l'aide de **Python**. Que remarque-t-on ?

II. Simulation des trajectoires en Python

II.1. Évolution de l'état du hamster sur une heure partant d'un état x_0 fixé

Dans ce qui suit, et sauf mention du contraire, on fait l'hypothèse que le hamster se trouve initialement dans l'état $x_0 = 2$ (c'est-à-dire qu'il dort). Autrement dit : $\mathbb{P}([X_0 = 2]) = 1$.

- ▶ Que vaut V_0 dans ce cas ? Et V_1 ?

- ▶ Faire le lien entre V_1 et A . En **Python**, quel appel sur A permet de récupérer V_1 ?

- ▶ Décrire le comportement que doit avoir une fonction **Python** simulant X_1 .

- ▶ Écrire, à l'aide de la fonction `rd.random()`, une fonction `SimuX1` (sans paramètre d'entrée) permettant de simuler la v.a.r. X_1 dans le cas où $x_0 = 2$.

II.2. Évolution de l'état du hamster sur une heure partant d'un état x_0 quelconque

- Modifier la fonction précédente afin de l'adapter au cas où x_0 est quelconque. On notera cette nouvelle fonction `SimuMarkovEtape`. On prendra la valeur `x0` ainsi que la matrice de transition `A` en paramètres d'entrée.

II.3. Évolution de l'état du hamster sur n heures

- Écrire une fonction `SimuMarkov(x0,A,n)` qui prend en paramètres l'état initial `x0`, la matrice de transition `A` et un entier n et renvoie une simulation de la v.a.r. X_n .

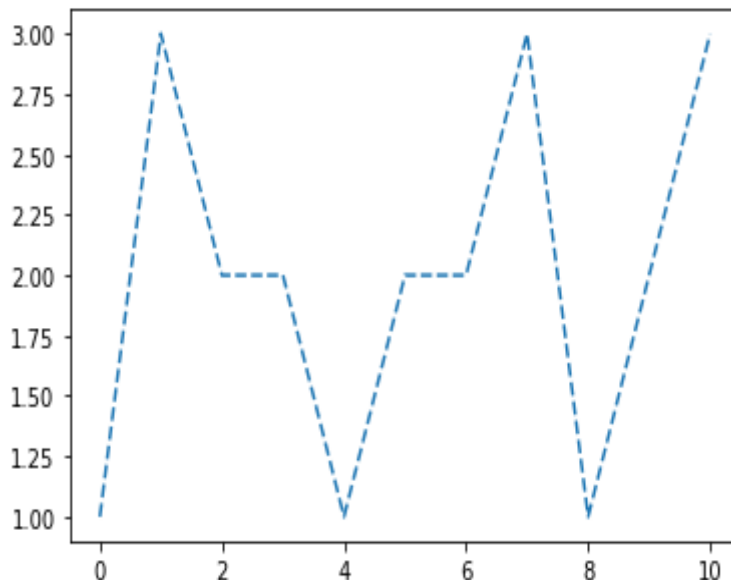
II.4. Simulation d'une trajectoire

- Pour $\omega \in \Omega$, on appelle **trajectoire** de taille n la suite finie $(X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
- Simuler une trajectoire de taille n c'est donc obtenir une suite (x_0, x_1, \dots, x_n) où x_i est le résultat de la simulation de X_i .
- Écrire une fonction `SimuTrajectoire(x0, A, n)` qui simule une trajectoire de taille `n`. Cette fonction renverra un tableau contenant la suite finie (x_0, x_1, \dots, x_n) .

II.5. Représentation de trajectoires

- ▶ Étant donné un état initial x_0 et une matrice de transition A , quel appel permet de représenter une trajectoire simulée de taille n ? On utilisera la fonction `plt.plot`.

- ▶ On représente ci-dessous le tracé obtenu avec le code précédent et le choix $x_0 = 1$ et $n = 10$.



III. Comportement asymptotique du hamster

On souhaite conjecturer le comportement de la loi de X_n lorsque n tend vers $+\infty$. On aimerait en particulier savoir si (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X . On se propose alors, pour un x_0 donné, de tracer les trois suites $(\mathbb{P}([X_n = k]))_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

- ▶ Partant de l'état initial x_0 , par quel appel obtient-on V_n en supposant que la matrice A^n est stockée dans une variable M ?

- ▶ Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la matrice

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_0 = 1]) & \mathbb{P}([X_0 = 2]) & \mathbb{P}([X_0 = 3]) \\ \mathbb{P}([X_1 = 1]) & \mathbb{P}([X_1 = 2]) & \mathbb{P}([X_1 = 3]) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$

```

1 def PremTermesLoiXn(x0, A, n):
2     V = np.zeros([n+1,3])
3     M = np.eye(3)
4     for k in range(n+1):
5         V[k] = _____
6         M = _____
7     return V

```

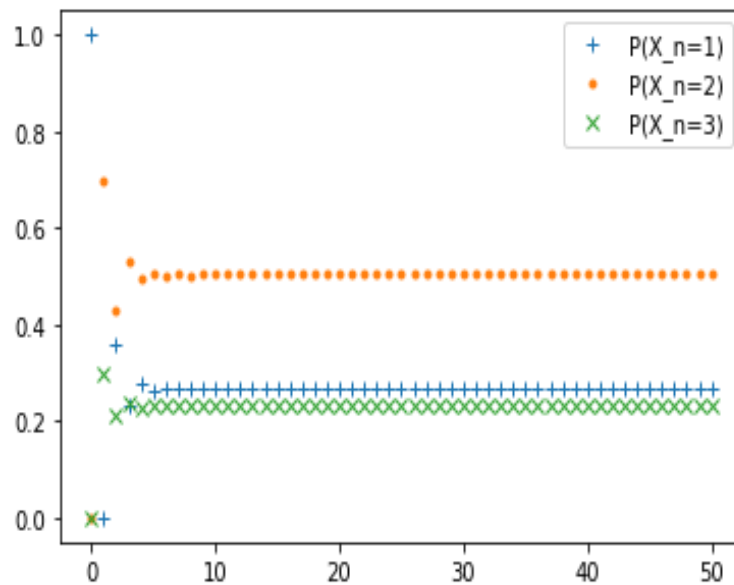
- On compile le script suivant :

```

1  n = 50
2  x0 = 1
3  Y = range(n+1)
4  V = PremTermesLoiXn(x0, A, n)
5  plt.plot(Y, V[:,0], '+', label='P(X_n=1)')
6  plt.plot(Y, V[:,1], '.', label='P(X_n=2)')
7  plt.plot(Y, V[:,2], 'x', label='P(X_n=3)')
8  plt.legend(loc='best')

```

et on obtient le tracé :



Que peut-on conjecturer ?

- En admettant que (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X qui ne dépend pas de x_0 et en notant

$$\pi = (\mathbb{P}([X = 1]) \quad \mathbb{P}([X = 2]) \quad \mathbb{P}([X = 3]))$$

Que peut-on dire de π ?

- On rappelle que lorsque n est grand, la matrice A^n est approximativement égale à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0.27 & 0.5 & 0.23 \\ 0.27 & 0.5 & 0.23 \\ 0.27 & 0.5 & 0.23 \end{pmatrix}$$

Donner alors une approximation de π .

- ▶ Que peut-on en conclure sur le comportement à terme du hamster ?