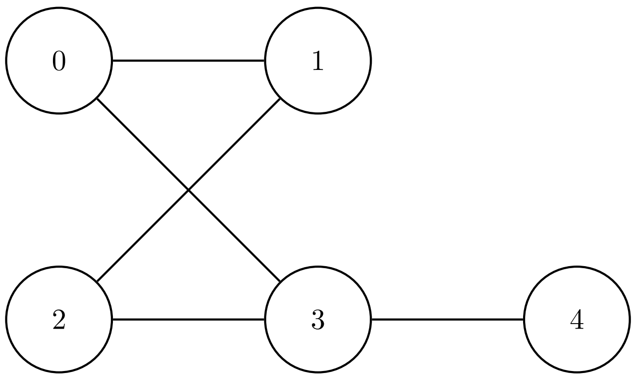
DM 7 vA

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `numpy.linalg` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

2. ***a)*** Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

b) On considère la fonction **Python** suivante :

```
def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,---)
n=B[---]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question ***2.a)***.

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

3. ***a)*** Déterminer la matrice D.

b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$?

b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a :

$$ {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 $$

c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ. Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5. ***a)*** À l'aide de la question ***3.b)***, montrer l'équivalence :

$$ LX = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}\,(U) $$

b) Conclure que λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5 sont des réels strictement positifs.