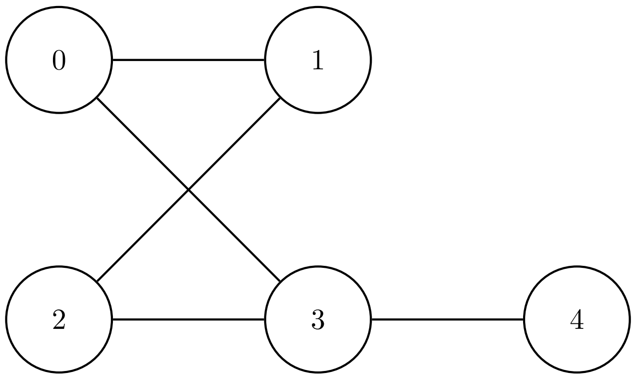
DM 7 vA

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `numpy.linalg` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

Démonstration. Le graphe n'est pas orienté. Ainsi, dans la matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 5} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (car le graphe comporte 5 sommets), on met un 1 en position (i, j) s'il y a une arête entre les sommets $i - 1$ et $j - 1$ et un 0 sinon (on prend en compte le fait que les sommets sont numérotés à partir de 0). En particulier, la matrice A sera symétrique. Ainsi

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\square$

2. ***a)*** Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

Démonstration. On a $2 - 1 - 0 - 3$, $2 - 1 - 2 - 3$, $2 - 3 - 0 - 3$, $2 - 3 - 2 - 3$ et $2 - 3 - 4 - 3$ soit

$$\boxed{\text{5 chemins de longueur 3 entre les sommets 2 et 3.}}$$

$\square$

b) On considère la fonction **Python** suivante :

```
def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,---)
n=B[---]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question ***2.a)***.

Démonstration. D'après le cours, le nombre de chemins de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 est le coefficient en position $(3, 4)$ (3^e ligne, 4^e colonne) de la matrice A^3 (décalage d'indice parce que les sommets sont numérotés à partir de 0). Ainsi, on complète de la manière suivante :

```
B=f(A,3)
n=B[2,3]
print(n)
```

(**Python** numérote aussi à partir de 0) □

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

3. a) Déterminer la matrice D.

Démonstration. Le degré d'un sommet est le nombre de voisins de ce sommet (c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet). Par conséquent, on a

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

Démonstration. La matrice L est symétrique donc diagonalisable.

Commentaire

Il aurait été plus judicieux d'introduire les notations $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ après cette question, puisque c'est la diagonalisabilité de L qui justifie l'existence des valeurs propres.

$\square$

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$?

Démonstration. Comme $X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et que $L \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, alors $LX \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, ${}^tXLX$ est le produit d'une matrice ligne (à 5 colonnes) et d'une matrice colonne (à 5 lignes), c'est une matrice à une ligne et une colonne, identifiée à un réel comme rappelé en début de question. $\square$

b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a :

$$ {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 $$

Démonstration. Tout d'abord,

$$ LX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b-d \\ -a+2b-c \\ -b+2c-d \\ -a-c+3d-e \\ -d+e \end{pmatrix} $$

D'où

$$ \begin{aligned} {}^tXLX &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-b-d \\ -a+2b-c \\ -b+2c-d \\ -a-c+3d-e \\ -d+e \end{pmatrix} \\ &= 2a^2 - ba - da - ba + 2b^2 - cb - bc + 2c^2 - cd - ad - dc + 3d^2 - de - de + e^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2bc - 2ad - 2cd - 2de \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-d)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 \end{aligned} $$

$\square$

c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ. Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

Démonstration. Tout d'abord, $LX = \lambda X$. On en déduit que

$$^tXLX = \lambda\, ^tXX = \lambda\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)$$

X étant un vecteur propre, on a nécessairement $X \neq 0_{\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ et donc $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 > 0$. D'après la question précédente, on a donc

$$\lambda = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-d)^2+(c-d)^2+(d-e)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } L \text{ sont positives ou nulles.}}$$

□

d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

Démonstration. $LU = 0_{\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ et $U \neq 0_{\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ donc 0 est valeur propre de L. Puisque toutes les valeurs propres de L sont positives ou nulles d'après la question précédente et qu'on les a listées par ordre croissant, on a bien

$$\boxed{\lambda_1 = 0.}$$

□

5. a) À l'aide de la question ***3.b)***, montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}(U)$$

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a - b - d & = 0 \\ -a + 2b - c & = 0 \\ - b + 2c - d & = 0 \\ -a - c + 3d - e & = 0 \\ - d + e & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a - b - d & = 0 & \\ 3b - 2c - d & = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ - b + 2c - d & = 0 & \\ - b - 2c + 5d - 2e & = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \\ - d + e & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a - b - d & = 0 & \\ 3b - 2c - d & = 0 & \\ 4c - 4d & = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ - 8c + 14d - 6e & = 0 & L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \\ - d + e & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a - b - d & = 0 & \\ 3b - 2c - d & = 0 & \\ 4c - 4d & = 0 & \\ 6d - 6e & = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \\ - d + e & = 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a - b - d & = 0 & \\ 3b - 2c - d & = 0 & \\ 4c - 4d & = 0 & \\ 6d - 6e & = 0 & \\ 0 & = 0 & L_5 \leftarrow 6L_5 + L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a - b & = d \\ 3b - 2c & = d \\ c & = d \\ e & = d \end{array}\right.$$

$$\iff a = b = c = d = e \qquad \textit{(par remontées successives)}$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\,(U)$$

□

b) Conclure que λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Démonstration. D'après la question précédente :

$$E_0(L) = \mathrm{Vect}\,(U)$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (U)$:

- engendre $E_0(L)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $E_0(L)$ et il suit que $\dim(E_0(L)) = 1$. Ceci prouve que les valeurs propres $\lambda_2, \dots, \lambda_5$ sont distinctes de $\lambda_1 = 0$ et donc sont non nulles. Puisque toutes les valeurs propres sont positives, il vient alors que

$$\boxed{\lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \text{ et } \lambda_5 \text{ sont des réels strictement positifs.}}$$

□