On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui tombe sur Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

- On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

P_k : « la pièce tombe sur Pile au k^e lancer »
F_k : « la pièce tombe sur Face au k^e lancer »

- On note T la variable aléatoire égale au rang du premier Face et on pose $U = T - 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à la longueur de la plus grande séquence de Pile consécutifs parmi les n premiers lancers ou égale à 0 si il n'y a aucun Pile. Par convention, on pose $X_0 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $X_n^{(\ell)}$ la variable aléatoire égale à la longueur de la plus grande séquence de Pile consécutifs parmi les lancers numéros $\ell + 1$, $\ell + 2$, …, $\ell + n$. Cette notation généralise la précédente, au sens où $X_n = X_n^{(0)}$. Par convention, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $X_0^{(\ell)} = 0$.

Exemple : si l'issue est $\omega = (\texttt{Pile}, \texttt{Pile}, \texttt{Face}, \texttt{Pile}, \texttt{Pile}, \texttt{Pile}, \dots)$, alors $T(\omega) = 3$, $U(\omega) = 2$, $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 2$, $X_3(\omega) = 2$, $X_4(\omega) = 2$, $X_5(\omega) = 2$, $X_6(\omega) = 3$, $X_1^{(1)}(\omega) = 1$, $X_2^{(1)}(\omega) = 1$, $X_3^{(1)}(\omega) = 1$, $X_4^{(1)}(\omega) = 2$, $X_5^{(1)}(\omega) = 3$.

Partie A : Etude des variables aléatoires T et U

1. Reconnaître la loi de T. Donner son espérance et sa variance.

Démonstration. L'expérience consiste en une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indentiques et indépendantes de paramètre q (le succès étant « la pièce tombe sur Face »).
La variable aléatoire T est égale au rang du premier succès.
On en déduit que $T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.
D'où $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{q}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}$. □

2. Déterminer la loi de U et calculer son espérance et sa variance. Donner une interprétation de la variable U en une phrase.

Démonstration. On a $U = T - 1$ et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U = k]) &= \mathbb{P}([T - 1 = k]) \\
&= \mathbb{P}([T = k + 1]) \\
&= qp^{k+1-1} && \text{car } k + 1 \in \mathbb{N}^* \\
&\boxed{= qp^k}
\end{aligned}$$

U admet une espérance et une variance par transformation affine d'une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(T - 1) \\
&= \mathbb{E}(T) - 1 && \textit{(par linéarité)} \\
&= \frac{1}{q} - 1 \\
&\boxed{= \frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(U) &= \mathbb{V}(T - 1) \\
&= \mathbb{V}(T) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&\boxed{= \frac{p}{q^2}}
\end{aligned}$$

La variable U est égale à la longueur de la séquence de Pile se situant avant le premier Face (cette longueur peut éventuellement être nulle si le premier lancer donne un Face). □

Partie B : Etude des variables aléatoires X_1 et X_2 et X_3

3. Reconnaître les lois de X_1 et X_2.

Démonstration. On trouve que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2,p)$. □

4. (a) Démontrer que la loi de X_3 est donnée par le tableau :

$x \in X_3(\Omega)$	0	1	2	3
$\mathbb{P}([X_3 = x])$	$(1-p)^3$	$p(1-p)(3-2p)$	$2p^2(1-p)$	p^3

Démonstration. La plus petite valeur que peut prendre X_3 est 0 (si il n'y a que des `Face` lors des 3 premiers lancers) et la plus grande valeur est 3 (si il n'y a que des `Pile` lors des 3 premiers lancers). Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles donc $\boxed{X_3(\Omega) = [\![0,3]\!]}$.

$$\begin{aligned}[X_3 = 0] \text{ est réalisé} &\iff \text{il n'y a aucun } \texttt{Pile} \text{ lors des 3 premiers lancers}\\ &\iff F_1 \cap F_2 \cap F_3 \text{ est réalisé}\end{aligned}$$

Par indépendance : $\boxed{\mathbb{P}([X_3 = 0]) = (1-p)^3}$.

$$\begin{aligned}[X_3 = 3] \text{ est réalisé} &\iff \text{il n'y a que des } \texttt{Pile} \text{ lors des 3 premiers lancers}\\ &\iff P_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ est réalisé}\end{aligned}$$

Par indépendance : $\boxed{\mathbb{P}([X_3 = 3]) = p^3}$.

$$\begin{aligned}[X_3 = 2] \text{ est réalisé} &\iff \begin{array}{l}\text{la plus longue séquence de } \texttt{Pile} \text{ consécutifs}\\ \text{parmi les 3 premiers lancers est de longueur 2}\end{array}\\ &\iff (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \text{ est réalisé}\end{aligned}$$

Par incompatibilité et indépendance : $\boxed{\mathbb{P}([X_3 = 2]) = 2p^2(1-p)}$.
La famille $([X_3 = k])_{k \in [\![0,3]\!]}$ est un système complet d'événements donc

$$\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}([X_3 = k]) = 1$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_3 = 1]) &= 1 - p^3 - (1-p)^3 - 2p^2(1-p)\\ &= 3p - 5p^2 + 2p^3\\ &= p(3 - 5p + 2p^2)\\ &\boxed{= p(1-p)(3-2p)} \qquad \textit{(1 est racine évidente)}\end{aligned}$$

□

(b) Calculer $\mathbb{E}(X_3)$. En considérant qu'il s'agit d'un polynôme en p, en donner une expression entièrement factorisée et qui ne dépend que de p.

Démonstration. La variable X_3 est finie donc admet une espérance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3) &= p(1-p)(3-2p) + 4p^2(1-p) + 3p^3\\ &= p^3 - p^2 + 3p\\ &\boxed{= p(p^2 - p + 3)}\end{aligned}$$

□

(c) Calculer $\lim\limits_{p\to 0} \mathbb{E}(X_3)$ et $\lim\limits_{p\to 1} \mathbb{E}(X_3)$. Interpréter les résultats.

Démonstration. $\boxed{\lim\limits_{p\to 0} \mathbb{E}(X_3) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{p\to 1} \mathbb{E}(X_3) = 3}$. Ces résultats sont cohérents avec le fait que :

- si $p = 0$, il n'y a que des `Face` (il n'y aura donc aucune séquence de `Pile` consécutifs parmi les 3 premiers lancers et donc X_3 prend toujours la valeur 0)
- si $p = 1$, il n'y a que des `Pile` (on aura donc toujours 3 `Pile` consécutifs parmi les 3 premiers lancers et donc X_3 prend toujours la valeur 3)

□

Partie C : Quelques valeurs extrémales dans le cas général

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $X_n(\Omega)$. On justifiera le résultat de manière concise.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les n premiers lancers. La variable X_n peut prendre la valeur 0 (si il n'y a aucun `Pile`) ainsi que la valeur n (si il n'y a que des `Pile`). Ce sont les valeurs extrémales possibles pour X_n. De plus, toutes les valeurs intermédiaires sont possibles (pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, si on obtient k `Pile` suivis de $n-k$ `Face`, alors X_n prend la valeur k).
Donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]}$. □

6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = 0])$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[X_n = 0] \text{ est réalisé} \iff \bigcap_{k=1}^{n} F_k \text{ est réalisé}$$

Donc, par indépendance,

$$\boxed{\mathbb{P}([X_n = 0]) = (1-p)^n = q^n}$$

□

7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[X_n = n] \text{ est réalisé} \iff \bigcap_{k=1}^{n} P_k \text{ est réalisé}$$

Donc, par indépendance,

$$\boxed{\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

□

8. (*) Soit $n \geq 2$.

(a) Montrer que, si $j \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, alors on ne peut pas trouver au cours des n premiers lancers une séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur exactement j et une autre séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur supérieure ou égale à j.

Démonstration. Soit $j \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Supposons qu'il existe, au cours des n premiers lancers, une séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur exactement j et une autre séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur $k \geq j$.
Ces deux séquences sont nécessairement disjointes et séparées par au moins un `Face`, sinon elles n'en formeraient qu'une et cela contredirait le fait que la première soit de longueur exactement j. Ainsi, pour que cette configuration ait lieu, il faut avoir au moins $j + k + 1$ lancers.

Or,

$$\begin{aligned} & j \geqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \\ \text{donc} \quad & j > \frac{n+1}{2} - 1 \\ \text{donc} \quad & 2j + 1 > n \\ \text{or} \quad & j + k \geqslant 2j \\ \text{donc} \quad & j + k + 1 > n \end{aligned}$$

C'est absurde. □

(b) En déduire que, pour tout $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant j \leqslant n-1$, $\mathbb{P}([X_n = j]) = 2p^j q + (n-j-1)p^j q^2$.

Démonstration. Soit $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant j \leqslant n-1$. D'après la question précédente, si, parmi les n premiers lancers, on trouve une séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur exactement j, alors nécessairement il n'y a pas de séquence de `Pile` consécutifs qui soit strictement plus longue et donc X_n prend la valeur j. On peut le reformuler en :

$$\begin{aligned} [X_n = j] \text{ est réalisé} \iff & \text{Il y a une séquence de Pile consécutifs de longueur exactement } j \text{ mais pas de séquence strictement plus longue parmi les } n \text{ premiers lancers} \\ \iff & \text{Il y a une séquence de Pile consécutifs de longueur exactement } j \text{ parmi les } n \text{ premiers lancers} \qquad \textit{(cf question 8a)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [X_n = j] \text{ est réalisé} \iff & \quad P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_j \cap F_{j+1} \text{ est réalisé} \\ & \text{ou } F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{j+1} \cap F_{j+2} \text{ est réalisé} \\ & \ldots \\ & \text{ou } F_{n-j-1} \cap P_{n-j} \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n \text{ est réalisé} \\ & \text{ou } F_{n-j} \cap P_{n-j+1} \cap \cdots \cap P_n \text{ est réalisé} \\ \iff & A_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-j} B_k \right) \cup C_{n-j+1} \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\bigcap_{k=1}^{j} P_k \right) \cap F_{j+1} \\ B_i &= F_{i-1} \cap \left(\bigcap_{k=i}^{i+j-1} P_k \right) \cap F_{i+j} \qquad \text{(pour tout } i \in [\![2, n-j]\!]) \\ C_{n-j+1} &= F_{n-j} \cap \left(\bigcap_{k=n-j+1}^{n} P_k \right) \end{aligned}$$

Par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= p^j q \\ \mathbb{P}(B_i) &= p^j q^2 \qquad \text{(pour tout } i \in [\![2, n-j]\!]) \\ \mathbb{P}(C_{n-j+1}) &= p^j q \end{aligned}$$

De plus, les événements de la famille $(A_1, B_2, \cdots, B_{n-j}, C_{n-j+1})$ sont deux à deux incompatibles. En effet, si deux tels événements sont simultanément réalisés, alors soit il existe un lancer où on a obtenu `Pile` et `Face`, ce qui est absurde, soit on a deux séquences distinctes de longueur j, ce qui est absurde d'après la question 8a.

On en déduit la formule : $\boxed{\mathbb{P}([X_n = j]) = 2p^j q + (n-j-1)p^j q^2}$.

□

9. Soient n et m deux entiers tels que $m > n \geqslant 1$. Les variables aléatoires X_n et X_m sont-elles indépendantes ?

Démonstration. Soient n et m deux entiers tels que $m > n \geqslant 1$. On a

$$[X_n = n] \cap [X_m = 0] = \varnothing \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}([X_n = n] \cap [X_m = 0]) = 0$$

Or,

$$\mathbb{P}([X_n = n]) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_m = 0]) \neq 0 \qquad \textit{(cf questions 6 et 7)}$$

Donc les variables aléatoires X_n et X_m ne sont pas indépendantes. □

Partie D : Calcul de $\mathbb{P}([X_n \leqslant 1])$ puis de $\mathbb{P}([X_n = 1])$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathbb{P}([X_n \leqslant 1])$ et $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.

10. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) = \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 1])$$

   Démonstration. La famille $([U = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. En effet, $U(\Omega) = \mathbb{N}$ d'après la question 2. D'après la formule des probabilités totales :

   $$\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = i])$$

   Or, pour tout $i \geqslant 2$, $[X_n \leqslant 1] \cap [U = i] = \varnothing$. En effet, si l'événement $[X_n \leqslant 1]$ est réalisé, alors la longueur de la première séquence de `Pile` ne peut pas excéder 1. On en déduit que

   $$\boxed{\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) = \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 1])}$$

   □

   (b) Exprimer l'événement $[X_n \leqslant 1] \cap [U = 0]$ à l'aide de la variable aléatoire $X_{n-1}^{(1)}$, puis l'événement $[X_n \leqslant 1] \cap [U = 1]$ à l'aide de la variable aléatoire $X_{n-2}^{(2)}$.

   Démonstration. On a

   $$\begin{aligned} [X_n \leqslant 1] \cap [U = 0] &= [X_n \leqslant 1] \cap F_1 \\ &= \boxed{\left[X_{n-1}^{(1)} \leqslant 1\right] \cap F_1} \end{aligned}$$

   En effet, le `Face` obtenu au premier lancer ne compte pas dans la longueur des séquences de `Pile` consécutifs donc si toutes les séquences obtenues au cours des lancers numéros $2, \dots, n$ ont une longueur inférieure ou égale à 1, il en est de même au cours des n premiers lancers, et réciproquement.
   De même,

   $$\begin{aligned} [X_n \leqslant 1] \cap [U = 1] &= [X_n \leqslant 1] \cap P_1 \cap F_2 \\ &= \boxed{\left[X_{n-2}^{(2)} \leqslant 1\right] \cap P_1 \cap F_2} \end{aligned}$$

   □

   (c) En déduire que
   $$\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) = q\mathbb{P}([X_{n-1} \leqslant 1]) + pq\mathbb{P}([X_{n-2} \leqslant 1])$$
   (on remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, X_n et $X_n^{(\ell)}$ suivent la même loi)

Démonstration. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) &= \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 1]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X_{n-1}^{(1)} \leqslant 1\right] \cap F_1\right) + \mathbb{P}\left(\left[X_{n-2}^{(2)} \leqslant 1\right] \cap P_1 \cap F_2\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X_{n-1}^{(1)} \leqslant 1\right]\right)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}\left(\left[X_{n-2}^{(2)} \leqslant 1\right]\right)\mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \quad \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= q\mathbb{P}\left(\left[X_{n-1}^{(1)} \leqslant 1\right]\right) + pq\mathbb{P}\left(\left[X_{n-2}^{(2)} \leqslant 1\right]\right) \\ &= \boxed{q\mathbb{P}([X_{n-1} \leqslant 1]) + pq\mathbb{P}([X_{n-2} \leqslant 1])}\end{aligned}$$

(car, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, X_n et $X_n^{(\ell)}$ suivent la même loi)

□

11. (a) En déduire qu'il existe $r_1 > r_2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

On explicitera r_1 et r_2 en fonction de q et $\Delta = q(1 + 3p)$ mais on n'explicitera pas λ et μ.

Démonstration. D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \geqslant 2,\ v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$$

Ainsi, par décalage d'indice :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = qv_{n+1} + pqv_n$$

Notons $P(X) = X^2 - qX - pq$ le polynôme caractéristique associé à cette suite. Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= q^2 + 4pq \\ &= q(q + 4p) \\ &= q(1 - p + 4p) \\ &= q(1 + 3p) \qquad \textit{(on retrouve la formule de l'énoncé)}\end{aligned}$$

On a $\Delta > 0$ donc le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes :

$$\boxed{r_1 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{r_2 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

et on a bien $r_1 > r_2$ par choix. □

(b) Déterminer A et B en fonction de λ, μ, r_1 et r_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$$

Démonstration. On pose $\boxed{A = \dfrac{\lambda}{r_1^2}}$ et $\boxed{B = \dfrac{\mu}{r_2^2}}$ (on a bien $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$ car $pq \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $P(X)$). □

(c) Montrer que $(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0$.

Démonstration. On remarque que $v_0 = \mathbb{P}([X_0 \leqslant 1]) = 1$ et $v_1 = \mathbb{P}([X_1 \leqslant 1]) = 1$. On évalue alors l'égalité de la question précédente en $n = 0$ et en $n = 1$. On a alors

$$\begin{cases} r_1^2 A + r_2^2 B = 1 \\ r_1^3 A + r_2^3 B = 1 \end{cases}$$

donc, en faisant $L_1 - L_2$, on obtient $\boxed{(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0}$. □

(d) (*) Montrer que $r_1^2 - r_1^3 = r_2^2 - r_2^3 = p^2 q$.
(Indication : on pourra utiliser la définition de r_i comme racine d'un certain polynôme puis exprimer r_i^2 et r_i^3 en fonction de r_i)

Démonstration. Soit $i \in \{1, 2\}$. Par définition de r_i, on a $P(r_i) = 0$ et donc

$$\boxed{r_i^2 = qr_i + pq}$$

D'où

$$\begin{aligned} r_i^3 &= qr_i^2 + pqr_i \\ &= q(qr_i + pq) + pqr_i \\ &= q^2 r_i + pq^2 + pqr_i \\ &= pq^2 + qr_i(q + p) \\ &= \boxed{pq^2 + qr_i} \end{aligned}$$

et finalement

$$r_i^2 - r_i^3 = qr_i + pq - (pq^2 + qr_i) = pq - pq^2 = pq(1 - q)\boxed{= p^2 q}$$

□

(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$v_n = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$$

De plus, $(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0$ et $r_1^2 - r_1^3 = r_2^2 - r_2^3 = p^2 q$
donc $p^2 qA + p^2 qB = 0$
donc $A = -B$ (car $p^2 q \neq 0$).
On en déduit que

$$v_n = A(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})$$

Or, $v_0 = 1 = A(r_1^2 - r_2^2)$, donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \\ &= \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \\ &= \frac{1}{q\sqrt{\Delta}} \qquad \text{(cf question 11a)} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{v_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})}$$

□

12. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}) - q^n$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X_n est à valeurs entières positives, on a

$$[X_n \leqslant 1] = [X_n = 0] \cup [X_n = 1]$$

et par incompatibilité, on obtient

$$\begin{aligned} v_n &= \mathbb{P}([X_n = 0]) + u_n \\ &= q^n + u_n && \textit{(cf question 6)} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}) - q^n}$$

□

(b) Montrer que $|r_2| \leqslant |r_1|$ puis que $|r_1| < 1$.

Démonstration. On a

$$r_1 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} |r_2| &= \left|\frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\right| \\ &\leqslant \frac{|q| + \left|\sqrt{\Delta}\right|}{2} && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} && \textit{(car } q \geqslant 0 \textit{ et } \sqrt{\Delta} \geqslant 0\textit{)} \\ &= r_1 \\ &= |r_1| \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |r_1| < 1 &\iff r_1 < 1 \\ &\iff \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} < 1 \\ &\iff q + \sqrt{\Delta} < 2 \\ &\iff \sqrt{\Delta} < 2 - q \\ &\iff \Delta < (2-q)^2 && \textit{(car } \sqrt{\Delta} \geqslant 0 \textit{ et } 2 - q \geqslant 0\textit{)} \\ &\iff (1-p)(1+3p) < (1+p)^2 \\ &\iff 1 - p + 3p - 3p^2 < 1 + 2p + p^2 \\ &\iff 0 < 4p^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a $\boxed{|r_1| < 1}$. □

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Interpréter en une phrase.

Démonstration. D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} r_2^n = 0$ car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

De plus, $q \in]0, 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Interprétation : au fur et à mesure que le nombre de lancers devient grand, il devient très improbable que la plus grande séquence de `Pile` soit de longueur 1. □

Partie E : Généralisation au calcul de $\mathbb{P}([X_n \leqslant j])$ puis de $\mathbb{P}([X_n = j])$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $v_n^{(j)} = \mathbb{P}([X_n \leqslant j])$ et $u_n^{(j)} = \mathbb{P}([X_n = j])$.

13. (*) Soit $n \geqslant 1$ et soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. En s'inspirant de la question 10, démontrer que

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant j]) = \sum_{i=0}^{j} qp^i \mathbb{P}([X_{n-i-1} \leqslant j])$$

Démonstration. Soit $n \geqslant 1$ et soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([U = i])_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n \leqslant j]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n \leqslant j] \cap [U = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}([X_n \leqslant j] \cap [U = i]) \qquad \textit{(car } [X_n \leqslant j] \cap [U = i] = \varnothing \textit{ pour } i > j\textit{)}
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![0, j]\!]$. Montrons que

$$[X_n \leqslant j] \cap [U = i] = \left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right] \cap [U = i]$$

par double inclusion.

- Si l'événement $[X_n \leqslant j]$ est réalisé, alors toutes les séquences de `Pile` consécutifs sont de longueur inférieure ou égale à j parmi les lancers numéros $1, 2, \dots, n$. Ceci implique que toutes les séquences de `Pile` consécutifs parmi les lancers numéros $i+2, i+3, \dots, n$ sont également de longueur inférieure ou égale à j.
  Donc $[X_n \leqslant j] \subset \left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right]$ et finalement $[X_n \leqslant j] \cap [U = i] \subset \left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right] \cap [U = i]$.
- Si l'événement $\left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right] \cap [U = i]$ est réalisé, alors
  - On obtient une première séquence de `Pile` de longueur i, aux lancers numéros $1, \dots, i$.
  - On obtient `Face` au lancer numéro $i+1$
  - Toutes les séquences de `Pile` consécutifs sont de longueur inférieure ou égale à j parmi les lancers numéros $i+2, i+3, \dots, n$. Notons M la longueur maximale d'une séquence de `Pile` consécutifs parmi ces lancers.

  Puisque `Face` est obtenu au lancer numéro $i+1$, la longueur maximale d'une séquence de `Pile` consécutifs parmi les n premiers lancers est $\max(i, M)$. Or $i \leqslant j$ et $M \leqslant j$. Donc $\max(i, M) \leqslant j$ et $[X_n \leqslant j]$ est réalisé. De plus, $[U = i]$ est réalisé donc $[X_n \leqslant j] \cap [U = i]$ est réalisé.

Reprenons le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n \leqslant j]) &= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}([X_n \leqslant j] \cap [U = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(\left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right] \cap [U = i]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(\left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right]\right) \mathbb{P}([U = i]) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)}
\end{aligned}$$

En effet, l'événement $[U = i]$ ne dépend que des lancers numéros $1, \dots, i+1$ tandis que l'événement $\left[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leqslant j\right]$ ne dépend que des lancers numéros $i+2, i+3, \dots, n$. D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_n \leqslant j]) = \sum_{i=0}^{j} qp^i \mathbb{P}([X_{n-i-1} \leqslant j])}$$

car $X_{n-(i+1)}^{(i+1)}$ et X_{n-i-1} suivent la même loi et $\mathbb{P}([U = i]) = qp^i$ (cf question 2). □

14. (a) (*) En déduire que, pour tout $j \geqslant 0$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$v_{n+j+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}$$

Démonstration. Soit $j \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$. On pose $m = n + j + 1$. On a alors $m \geqslant j + 1$ et d'après la question précédente :

$$v_m^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} qp^i v_{m-i-1}^{(j)}$$

d'où

$$\begin{aligned} v_{n+j+1}^{(j)} &= \sum_{i=0}^{j} qp^i v_{n+j-i}^{(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{j} qp^{j-k} v_{n+k}^{(j)} && \textit{(en posant } k = j - i\textit{)} \\ &= \boxed{\sum_{i=0}^{j} qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}} \end{aligned}$$

□

(b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Préciser les valeurs des $j + 1$ premiers termes de la suite $(v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $n \in [\![0, j]\!]$. L'événement $[X_n \leqslant j]$ est certain donc

$$\boxed{v_n^{(j)} = 1}$$

□

Ainsi, on a montré que la suite $\left(v_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre* $j + 1$.

15. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'événement $[X_{n+1} \leqslant j]$ est réalisé, alors toute séquence de `Pile` consécutifs au cours des $n + 1$ premiers lancers est de longueur inférieure ou égale à j. C'est donc également le cas si l'on se restreint aux n premiers lancers et donc $[X_n \leqslant j]$ est réalisé.
D'où $[X_{n+1} \leqslant j] \subset [X_n \leqslant j]$ et par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient $\mathbb{P}([X_{n+1} \leqslant j]) \leqslant \mathbb{P}([X_n \leqslant j])$, *i.e.*

$$v_{n+1}^{(j)} \leqslant v_n^{(j)}$$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$. □

16. (a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^{(j)} = 0$.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. La suite $(v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est

- décroissante
- minorée par 0 (chaque terme est la probabilité d'un événement)

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(v_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qui vérifie : $\ell \geqslant 0$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+j+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}$$

et toutes les suites extraites tendent également vers ℓ. Comme il s'agit d'une somme finie, on peut passer à la limite :

$$\ell = \sum_{i=0}^{j} qp^{j-i}\ell = \ell q \sum_{i=0}^{j} p^{j-i} = \ell q \frac{1 - p^{j+1}}{1 - p} = \ell(1 - p^{j+1}) = \ell - \ell p^{j+1}$$

donc $\ell p^{j+1} = 0$ et donc $\boxed{\ell = 0}$ car $p \neq 0$. □

(b) En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]\right) = 0$ puis que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]\right) = 0$. Interpréter.

Démonstration. • Soit $j \in \mathbb{N}$. La suite d'événements $([X_n \leqslant j])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (vu en question 15) donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n \leqslant j]) = \lim_{n\to+\infty} v_n^{(j)} = 0$$

• Notons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $E_j = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]$. La suite d'évenements $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante (si toutes les séquences de `Pile` consécutifs sont de longueur inférieure ou égale à j alors elles sont toutes de longueur inférieure ou égale à $j + 1$). Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}(E_j) = \lim_{j\to+\infty} 0 = 0$$

En passant au complémentaire, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n > j]\right) = 1$$

Ainsi, lorsque l'on lance une infinité de fois une pièce de monnaie, il est quasi-certain de voir apparaître des séquences de `Pile` consécutifs de longueur arbitrairement grandes. □

17. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u_n^{(j)}$ en fonction de $v_n^{(j)}$ et $v_n^{(j-1)}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Puisque X_n est à valeurs entières, on a

$$[X_n \leqslant j] = [X_n = j] \cup [X_n \leqslant j - 1]$$

D'où, par incompatibilité :

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant j]) = \mathbb{P}([X_n = j]) + \mathbb{P}([X_n \leqslant j - 1])$$

ce qui se traduit par

$$\boxed{u_n^{(j)} = v_n^{(j)} - v_n^{(j-1)}}$$

□

(b) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{(j)} = 0$.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a $[X_n = j] \subset [X_n \leqslant j]$ donc $\mathbb{P}([X_n = j]) \leqslant \mathbb{P}([X_n \leqslant j])$. D'où

$$0 \leqslant \mathbb{P}([X_n = j]) \leqslant \mathbb{P}([X_n \leqslant j])$$

i.e.

$$0 \leqslant u_n^{(j)} \leqslant v_n^{(j)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^{(j)} = 0$ (cf question 16a) donc par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{(j)} = 0}$.

□

(c) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi vers une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$?

Démonstration. On a vu que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(j)} = 0$$

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = j]) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) = 0$

Donc $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) = 0 \neq 1$. C'est absurde. Donc la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers une telle variable aléatoire. □

Partie F : Simulation informatique

18. On importe la bibliothèque `numpy.random as rd`. On rappelle que la commande `rd.binomial(n,p,d)` renvoie un vecteur contenant d simulations indépendantes de la loi binomiale de paramètres n et p. Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il simule la variable aléatoire X_n (on codera les `Pile` par des 1 et les `Face` par des 0).

```
def SimulX(n,p):
    L = rd.binomial(1,p,n) #vecteur contenant les résultats des n lancers
    m = 0 #contiendra la longueur maximale de toutes les séquences de Pile
    l = 0 #contiendra la longueur de la séquence en cours
    for k in range(n):
        if L[k]==1:
            l = l + 1
        else:
            if l > m:
                m = l
            l = 0
    if l > m:
        m = l
    return m
```

On supposera pour la suite des simulations que $p = \frac{1}{2}$.

20. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en argument un entier naturel n et renvoie la matrice

$$V_n = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \cdots\cdots & v_n^{(0)} \\ v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \cdots\cdots & v_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0^{(n)} & v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \cdots\cdots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

```
def CalculV(n):
    V = np.zeros([n+1,n+1]) #crée la matrice V_n, initialement remplie de zéros
    for j in range(n+1):
        for i in range(j+1):
            V[j,i]= 1
        for i in range(j+1,n+1):
            for k in range(j+1):
                V[j,i] = V[j,i] + V[j,i-k-1]/(2**(k+1))
    return V
```

21. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en argument un entier naturel n et renvoie la matrice

$$U_n = \begin{pmatrix} u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \cdots\cdots & u_n^{(0)} \\ u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots\cdots & u_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots\cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

```
def calculU(n):
    V = CalculV(n)
    U = np.zeros([n+1,n+1])
    for i in range(n+1):
        U[0,i] = V[0,i]
    for j in range(1,n+1):
        for i in range(n+1):
            U[j,i] = V[j,i]-V[j-1,i]
    return U
```

22. Pour la curiosité, on affiche l'histogramme en fréquence des lois de X_5, X_{10}, X_{20} et X_{40}, ainsi que le tracé des suites $\left(u_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour quelques valeurs de j.

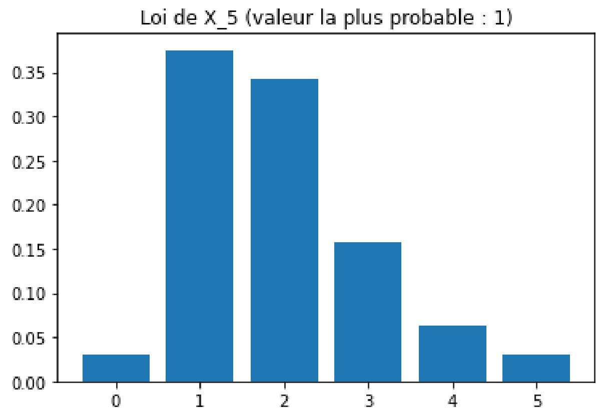

Figure 1 – Loi de X_5

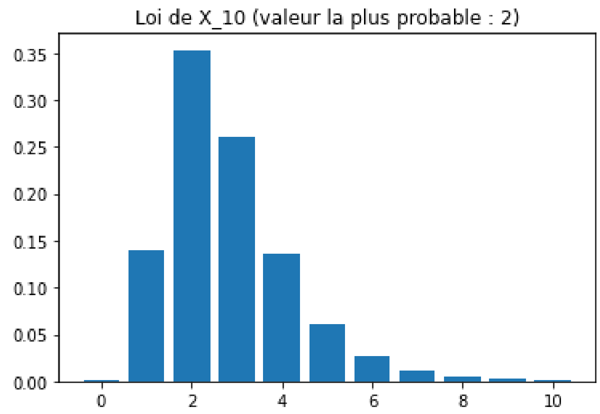

Figure 2 – Loi de X_{10}

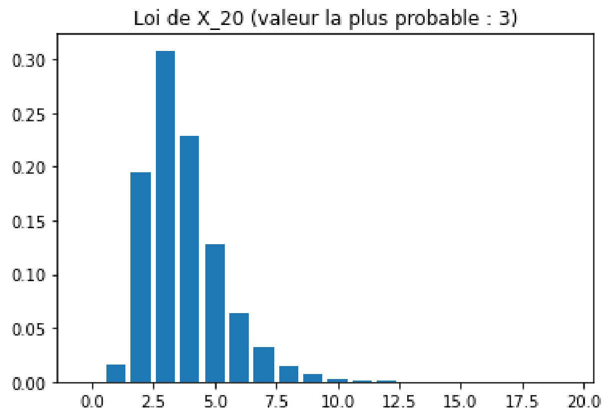

Figure 3 – Loi de X_{20}

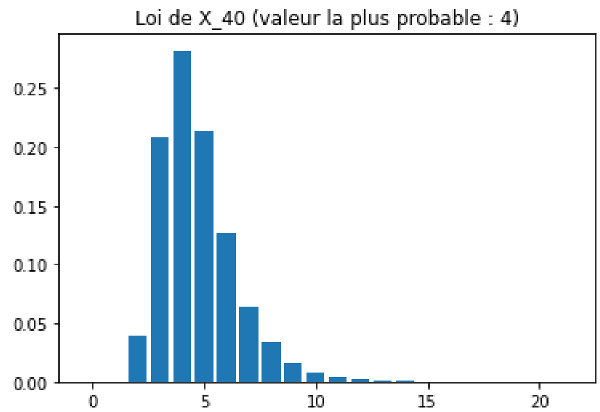

Figure 4 – Loi de X_{40}

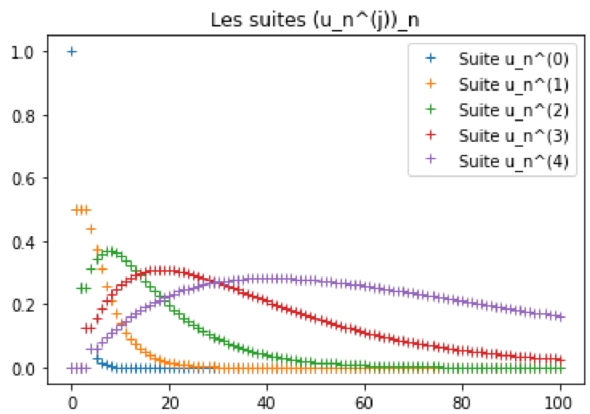

Figure 5 – Tracé de quelques suites $\left(u_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

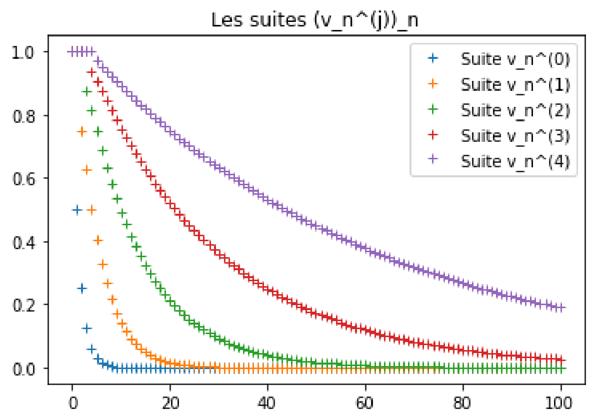

Figure 6 – Tracé de quelques suites $\left(v_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$