DS7 - ESSEC-I 2012

Problème II (ESSEC I 2012) /92

Notations et définitions

- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales /36

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $a\,U + b$ suit aussi une loi normale.
Quels en sont les paramètres ?

- 1 pt : $\mathbb{E}(aU + b) = am + b$

- 1 pt : $\mathbb{V}(aU + b) = a^2\,\sigma^2$

2. *Cas où $m = 0$.*
On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

a) *Densité.*
Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de X.

- 1 pt : $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$ **donc si** $x < 0$**,** $F(x) = 0$

- 3 pts : si $x \geqslant 0$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant \ln(x)])$ **(par stricte croissance de** $\ln$ **sur** $]0, +\infty[$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\ln(X) \leqslant \ln(x)]) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{Y}{\sigma} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right]\right)$
- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2) \Rightarrow \dfrac{Y}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ **(q. *1.*) donc** $\mathbb{P}([\ln(X) \leqslant \ln(x)]) = \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right)$

- 3 pts : X **v.a.r. à densité**

- **1 pt : la continuité est démontrée sur les intervalles ouverts**
- **1 pt :** F **continue sur** $]0, +\infty[$ **par composée d'applications continues sur des intervalles ouverts**
- **1 pt :** F **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 0 **par des arguments similaires**

- **3 pts : détermination d'une densité**
  - × **1 pt : on dérive sur les intervalles ouverts**
  - × **1 pt : si $x \in \,]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right)$**
  - × **1 pt : on pose $f(0) = 0$**

b) *Espérance.*

(i) Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\, dy$.

- **3 pts : hypothèses du théorème de transfert**
  - × **1 pt : la fonction $g : x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$**
  - × **1 pt : donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $X = g(Y)$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ est absolument convergente**
  - × **1 pt : ce qui équivaut à la convergence car : $\forall y \in \mathbb{R}$, $e^y\,\varphi_{0,\sigma^2}(y) > 0$**
- **3 pts : critère de négligeabilité d'intégrales de fonctions continues positives**
  - × **1 pt : $\forall y \in [1,+\infty[$, $e^{-\frac{y^2}{2\,\sigma^2}+y} > 0$ et $\dfrac{1}{y^2} > 0$**
  - × **1 pt : $e^{-\frac{y^2}{2\,\sigma^2}+y} \underset{y\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$**
  - × **1 pt : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{y^2}\, dy$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^y\varphi_{0,\sigma^2}(y)\, dy$ bien définie car $y \mapsto e^y\varphi_{0,\sigma^2}(y)$ continue sur $[-1,1]$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Y) \ = \ \dfrac{1}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}\, dy$**

(ii) En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ.

- **1 pt : $\psi : t \mapsto \sigma\,(t+\sigma)$ est de classe $\mathcal{C}^1$**
- **1 pt : on obtient $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\cancel{\sigma}\,\sqrt{2\,\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\big(\sigma(t+\sigma)\big)^2}{\sigma^2} - 2\sigma(t+\sigma)\right)\right)(\cancel{\sigma}\ dt)$**
- **1 pt : $\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\big(\sigma(t+\sigma)\big)^2}{\sigma^2} - 2\sigma(t+\sigma)\right)\right) = e^{\frac{\sigma^2}{2}}\ \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ t^2\right)$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X) = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt$**

c) *Variance.*

(i) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.

- **1 pt : on note $Z = X^\alpha$ et $h : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha\,\ln(x)}$ de sorte que : $Z = h(X)$.**
  On a alors : $Z(\Omega) \ = \ \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ \subset \ h\big(]0,+\infty[\big) = \,]0,+\infty[$
- **1 pt : $\ln(Z) = \ln(X^\alpha) = \alpha\,\ln(X)$**
- **1 pt : $\alpha\,\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \alpha^2\,\sigma^2\right)$ d'après *1.***

(ii) En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$.

- **1 pt :** $X^2 \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, 2^2\,\sigma^2)$ **(d'après qst précédente)**
- **1 pt : d'après la q *2.b)(i)*, X^2 admet une espérance, donc X admet une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbf{e}^{2\,\sigma^2}$ **(d'après *2.b)(ii)*)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \mathbf{e}^{\sigma^2}\big(\mathbf{e}^{\sigma^2}-1\big)$ **(formule de KH)**

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif.
Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $\big(m+\ln(\mu), \sigma^2\big)$.

- **1 pt : on note note $S = \mu\, X$ et $h : x \mapsto \mu\, x$ de sorte que : $S = h(X)$.
  On a alors :** $S(\Omega) \ = \ \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ \subset \ h\big(]0,+\infty[\big) = \,]0,+\infty[$
- **1 pt :** $\ln(S) \ = \ \ln(\mu\, X) \ = \ \ln(X) + \ln(\mu) \ = \ Y + \ln(\mu)$
- **1 pt : comme $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$, alors :** $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$
- **1 pt : d'après la q *1.* (avec $a = 1$ et $b = \ln(\mu)$) :** $\ln(S) = Y + \ln(\mu) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m+\ln(\mu), \sigma^2\right)$

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\big(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\big)$$

- **1 pt : l'idée est de trouver μ_0 tel que** $U = \mu_0\, X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$
- **1 pt :** $\mu\, X \ \hookrightarrow \ \mathcal{LN}(m+\ln(\mu), \sigma^2)$
- **1 pt :** $m + \ln(\mu_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(\mu_0) = -m \ \Leftrightarrow \ \mu_0 = \mathbf{e}^{-m}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(U) = \mathbf{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}$ **d'après *2.b)***
- **1 pt :** $\mathbb{V}(U) = \mathbf{e}^{\sigma^2}\left(\mathbf{e}^{\sigma^2}-1\right)$ **d'après *2.c)(ii)***
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^m\, U\right) \ = \ \mathbf{e}^m\, \mathbb{E}(U) \ = \ \mathbf{e}^m\, \mathbf{e}^{\frac{\sigma^2}{2}} \ = \ \mathbf{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{V}\left(\mathbf{e}^m\, U\right) \ = \ (\mathbf{e}^m)^2\; \mathbb{V}(U) \ = \ \mathbf{e}^{2m} \times \mathbf{e}^{\sigma^2}\left(\mathbf{e}^{\sigma^2}-1\right) \ = \ \mathbf{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathbf{e}^{\sigma^2}-1\right)$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein /56

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\dfrac{kt}{n}$, $k \in \{1, ..., n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} \ = \ S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k = 1]) = \mathbb{P}([Y_k = -1]) = \dfrac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, ..., S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. Simulation de la variable aléatoire C_n.

a) Que renvoie la fonction **Scilab** suivante ?

```
function Y = mystere()
  u = rand()
  if u < 1/2 then
    Y = -1
  else
    Y = 1
  end
endfunction
```

- 2 pts : la fonction renvoie une simulation de la v.a.r. Y (même sans explication)

b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « $\cdots$ » par des expressions en **Scilab** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function C = SimuC(n, mu, v)
  C = 1
  for k = ...
    C = C * ...
  end
endfunction
```

- 1 pt :

```
  for k = 1 :n
```

- 2 pts :

```
    C = C * (1 + mu / n + (v / sqrt(n)) * mystere())
```

5. a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_k) = -1 \times \mathbb{P}([Y_k = -1]) + 1 \times \mathbb{P}([Y_k = 1]) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_k^2) = (-1)^2 \times \mathbb{P}([Y_k = -1]) + 1^2 \times \mathbb{P}([Y_k = 1]) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

- 1 pt : par la formule de KH : $\mathbb{V}(Y_k) = \mathbb{E}(Y_k^2) - \left(\mathbb{E}(Y_k)\right)^2 = 1 - 0^2 = 1$

b) (i) Montrer l'égalité : $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$.

- 1 pt : par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ **où** $\mathcal{P}(m)$: $S_{m,n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$

- 1 pt : initialisation $S_{1,n} = S_{1-1,n} \times \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_1\right)$

- 2 pts : hérédité

× **1 pt :** $S_{m+1,n} = S_{m,n} \times \left(1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}\, Y_{m+1}\right)$

× **1 pt : par hyp de réc** $S_{m,n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)$

(ii) En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + \dfrac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

- **1 pt : la v.a.r. C_n admet une variance car finie (produit de v.a.r. finies)**
- **1 pt :** $1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_1, \dots, 1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_n$ **indépendantes par lemme des coalitions**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)\right) = \prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right) = 1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,\mathbb{E}(Y_k) = 1+\dfrac{\mu}{n}+\cancel{\dfrac{v}{\sqrt{n}}\times 0} = 1+\dfrac{\mu}{n}$ ***(5.a))***
- **0 pt :** $\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(C_n^2) = \mathbb{E}\left(\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right)$
  $= \prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + 2\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k + \dfrac{v^2}{n}\,Y_k^2\right)$
  $= \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + 2\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)\dfrac{v}{\sqrt{n}}\,\mathbb{E}(Y_k) + \dfrac{v^2}{n}\,\mathbb{E}(Y_k^2)$
- **1 pt :** $= \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + \cancel{2\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)\dfrac{v}{\sqrt{n}}\times 0} + \dfrac{v^2}{n}\times 1 = \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + \dfrac{v^2}{n}$ **par *5.a)***
- **1 pt :** $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + \dfrac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^{2n}$ **(formule de KH)**

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{V}(C_n) = e^{2\mu}\left(e^{v^2}-1\right)$.
Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)\right)$
- **1 pt :** $n\ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\dfrac{\mu}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n}\dfrac{\mu}{\cancel{n}} = \mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(C_n) = \mathrm{e}^{\mu}$
- **1 pt :** $\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{2\mu}$
- **1 pt :** $\left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2 + \dfrac{v^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+(2\mu+v^2)\,\dfrac{1}{n}+\dfrac{\mu^2}{n^2}\right)\right)$
- **1 pt :** $n\ln\left(1+(2\mu+v^2)\,\dfrac{1}{n}+\dfrac{\mu^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n}\times\dfrac{1}{\cancel{n}}\left(2\mu+v^2+\dfrac{\mu^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\mu+v^2$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{V}(C_n) = \mathrm{e}^{2\mu+v^2} - \mathrm{e}^{2\mu} = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right)$
- **0 pt : on cherche m et σ^2 tels que** $\mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{\mu}$ **et** $\mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) = \mathrm{e}^{2\mu}\left(\mathrm{e}^{v^2}-1\right)$
- **2 pts : résolution de** $\left\{\begin{array}{rcrcl} m & + & \dfrac{\sigma^2}{2} & = & \mu \\ 2m & + & \sigma^2 & = & 2\mu \\ & & \sigma^2 & = & v^2 \end{array}\right.$ **. On trouve finalement :** $X \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(\dfrac{2\mu-v^2}{2}, v^2\right)$

6. a) Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = a_n + b_n\, Y_k$$

- **1 pt :** $a_n - b_n \ = \ \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$
- **1 pt :** $a_n + b_n \ = \ \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$
- **1 pt :** $a_n = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right)$
- **1 pt :** $b_n = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right)$

b) En déduire : $\ln(C_n) = n\, a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

- **1 pt :** $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} \ > \ 0$ **et** $1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}} \ > \ 0$**, donc :** $C_n(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\ln(C_n) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\, Y_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_n + b_n\, Y_k)$

c) Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.

- **2 pts :** $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi, de même variance non nulle (d'après *5.a)*, elle vaut** 1**)**
- **1 pt : d'après le TCL :** $S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} Z$**, où** $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$

7. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ au voisinage de 0.

- **2 pts :** $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$ **(tout ou rien)**

b) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1 + vx + \mu x^2)$ et $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.

- **2 pts :** $\ln(1 + vx + \mu x^2) \ = \ vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$
  en appliquant l'égalité $\ln(1 + u) \ = \ u - \frac{1}{2}\, u^2 + u^2\, \varepsilon(u)$ **en** $u = vx + \mu x^2$
- **2 pts :** $\ln(1 - vx + \mu x^2) \ = \ -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$
  en appliquant l'égalité $\ln(1 + u) \ = \ u - \frac{1}{2}\, u^2 + u^2\, \varepsilon(u)$ **en** $u = -vx + \mu x^2$

c) Démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = \mu - \frac{v^2}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,b_n = v$.
En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

- **0 pt :** $(*)$ $\ln(1+vx+\mu x^2) \; = \; vx + \left(\mu - \dfrac{v^2}{2}\right) x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x)$
- **1 pt :** $(*)$ **appliqué à** $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ **:** $\ln\left(1 + \dfrac{v}{\sqrt{n}} + \dfrac{\mu}{n}\right) = \dfrac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \dfrac{v^2}{2}\right)\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\;\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- **1 pt :** $(*)$ **appliqué à** $x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ **:** $\ln\left(1 - \dfrac{v}{\sqrt{n}} + \dfrac{\mu}{n}\right) = -\dfrac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \dfrac{v^2}{2}\right)\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\;\varepsilon_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- **1 pt : finalement** $n\,a_n = \mu - \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
- **2 pts : en procédant de même :** $\sqrt{n}\,b_n = v + \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\left(\varepsilon_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \varepsilon_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
- **1 pt : comme** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,b_n = v$ **et** $v \neq 0$**, on a :** $\sqrt{n}\,b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v$ **donc** $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v}{\sqrt{n}}$
- **1 pt : deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang donc les termes de** (b_n) **sont** > 0 **à partir d'un certain rang**

8. On note F_n la fonction de répartition de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

a) Soit ε un réel strictement positif.

(i) Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \;\leqslant\; \Phi(y-\eta) \;\leqslant\; \Phi(y+\eta) \;\leqslant\; \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

- **1 pt :** Φ **continue en** y **donc il existe** $\eta > 0$ **tel que, pour tout** $z \in \mathbb{R}$ **:**
  $|z - y| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |\Phi(z) - \Phi(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
- **1 pt : application** $z = y + \eta$ **et** $z = y - \eta$
- **1 pt :** Φ **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

(ii) On admet : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = \mu - \frac{v^2}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,b_n = v$, et que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
Montrer alors qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$y - \eta \;\leqslant\; \frac{x - na_n}{\sqrt{n}\,b_n} \;\leqslant\; y + \eta$$

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n} \;=\; \frac{x - \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)}{v} \;=\; \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v} \;=\; y$
- **1 pt : ains :** $\forall \varepsilon_0 > 0$**,** $\exists n_1 \in \mathbb{N}$**,** $\forall n \geqslant n_1$ **:** $\left|\dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n} - y\right| \;\leqslant\; \varepsilon_0$
- **1 pt :** $\left|\dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n} - y\right| \;\leqslant\; \varepsilon_0 \;\Leftrightarrow\; y - \varepsilon_0 \leqslant \dfrac{x - n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n} \leqslant y + \varepsilon_0$

(iii) Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$:

$$F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

- **1 pt : d'après *6.c)*, pour tout $z \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(z) \ = \ \Phi(z)$. On en déduit :**
- **1 pt : $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|F_n(z) - \Phi(z)| \ \leqslant \ \varepsilon_1$ ($\Phi(z)-\varepsilon_1 \ \leqslant \ F_n(z) \ \leqslant \ \Phi(z)+\varepsilon_1$)**
- **1 pt : en appliquant à $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $z = y+\eta$, on obtient :**
  $\exists n_3 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_3$, $\Phi(y+\eta) - \dfrac{\varepsilon}{2} \ \leqslant \ F_n(y+\eta) \ \leqslant \ \Phi(y+\eta) + \dfrac{\varepsilon}{2}$

(iv) Montrer : $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x-na_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right)$, et en déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \ \leqslant \ \varepsilon$$

- **1 pt : $G_n(x) = \mathbb{P}([\ln(C_n) \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[n\,a_n + b_n \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right]\right)$**
  $= F_n\left(\dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right)$
- **1 pt : on note $N = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant N$.**
- **1 pt : comme $n \geqslant N \geqslant n_1$, d'après *8.a)(ii)* : $y-\eta \ \leqslant \ \dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n} \ \leqslant \ y+\eta$**
- **1 pt : par croissance de F_n : $F_n(y-\eta) \leqslant F_n\left(\dfrac{x-n\,a_n}{\sqrt{n}\,b_n}\right) \leqslant F_n(y+\eta)$**
- **1 pt : d'après *7.a)(iv)* car $n \geqslant N \geqslant n_2$:**
  $F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ **et** $F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \dfrac{\varepsilon}{2}$
- **1 pt : d'après *7.a)(i)* :**
  $\Phi(y-\eta) - \dfrac{\varepsilon}{2} \geqslant \left(\Phi(y) - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ **et** $\Phi(y+\eta) + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \left(\Phi(y) + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2}$

b) (`CUBES` **uniquement**). En conclure que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

- **1 pt : d'après *8.a)*, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) \ = \ \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)$**
- **1 pt : $\Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) = \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[v\,Z + \mu - \dfrac{v^2}{2} \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}([T \leqslant x])$**
- **1 pt : $T = v\,Z + \mu - \dfrac{v^2}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$ car $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$**
- **1 pt : ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \Phi_{\mu-\frac{v^2}{2},v^2}(x)$**
  $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geqslant 1}$ **converge en loi vers la v.a.r. T de loi $\mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$**

9. (`CUBES` **uniquement**). Démontrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

- 3 pts : si $D \hookrightarrow \mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$**, alors** $F_D : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ \Phi\left(\dfrac{\ln(x) - \mu + \frac{v^2}{2}}{v^2}\right) & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{array}\right.$

- 2 pts : $F_{C_n} : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ G_n(\ln(x)) & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{array}\right.$

- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{C_n}(x) = F_D(x)$

Partie III - La formule de Black et Scholes

Soit t un réel strictement positif. À la date 0, un investisseur achète sur un marché une option sur une action dont la date d'échéance est t et le prix d'exercice K, un réel strictement positif.

- Si à la date t, le cours C de l'action est supérieur ou égal à K, il peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix C ;
- dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date t.

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note π_K.
On fait les hypothèses suivantes :

- On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0 c'est-à-dire qu'à cet instant le cours de l'action vaut 1.
- Le cours de l'action à la date t est une variable aléatoire C qui suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2).
- On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et t vaut $\mathrm{e}^r - 1$, où r est un réel strictement positif.
- On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel, $f(x) = \max(0, x)$.

10. ***a)*** Justifier que la valeur de l'option à la date t est $f(C - K)$.

- 1 pt : utilisation des ω

- 2 pts : si $C(\omega) \geqslant K$ **:**

  × **1 pt : la valeur de l'option à la date** t **est :** $C(\omega) - K$

  × **1 pt :** $f\big(C(\omega) - K\big) = C(\omega) - K$

- 2 pts : si $C(\omega) < K$ **:**

  × **1 pt : la valeur de l'option à la date** t **est** 0

  × **1 pt :** $f\big(C(\omega) - K\big) = \max(0, C(\omega) - K) = 0$

b) Si au lieu d'acheter l'option, l'investisseur avait placé à la date 0 son prix d'achat π_K sur l'actif non risqué, quel serait la valeur de son placement à la date t ?

- 1 pt : si l'investisseur a placé un prix π_K **sur l'actif non risqué, alors, d'après l'énoncé, l'actif lui a rapporté à la date** t **:** $\pi_K \times (\mathrm{e}^r - 1)$**.**

- 1 pt : à la date t**, la valeur de son placement est :** $\pi_K + \pi_K\,(\mathrm{e}^r - 1) = \pi_K\,\mathrm{e}^r$

c) En déduire qu'il convient de poser $\pi_K = \mathrm{e}^{-r}\, \mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$ si l'on veut que ces deux stratégies aient la même rentabilité moyenne.
Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

- **2 pts :** $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \;=\; \mathbf{e}^r\, \pi_K$
(on met 1 pt pour égalité entre rentabilité trouvée aux questions précédentes mêmes si celles-ci sont fausses)

11. ***a)*** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ x & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
- **1 pt :** f **est continue sur** $]-\infty, 0[$ **en tant que fonction constante**
- **1 pt :** f **est continue sur** $]0, +\infty[$ **en tant que fonction polynomiale**
- **1 pt :** f **continue en** 0. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$ et l'égalité :

$$\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \;=\; \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\, dx$$

- **1 pt : comme** f **est continue sur** $\mathbb{R}$**, par théorème de transfert, la v.a.r.** $f(C-K)$ **admet une espérance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt$ **est absolument convergente**
- **1 pt : l'intégrande étant positive, cela revient à démontrer la convergence**
- **1 pt :** $\forall t \in\,]0, +\infty[,\ f(t-K) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } t < K \\ t-K & \textbf{si } t \geqslant K \end{cases}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt \;=\; \int_K^{+\infty} f(t-K)\, f_C(t)\, dt$
car $t \mapsto f(t-K)\, f_C(t)$ **est nulle en dehors de** $[K, +\infty[$
- **3 pts : théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives**
  × **1 pt :** $0 \leqslant f(t-K)\, f_C(t) \leqslant t\, f_C(t) - K\, f_C(t)$
  × **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f_C(t)\, dt$ **est convergente car c'est le moment d'ordre** 1 **de** C ***(3.b)***
  × **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_C(t)\, dt$ **est convergente (et vaut** 1**) car moment d'ordre** 0 **de** C
- **1 pt : par théorème de transfert** $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) \;=\; \mathbb{E}\big(f(\mathbf{e}^D - K)\big) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{e}^x - K)\, \varphi_{m,v^2}(x)\, dx$
- **1 pt : si** $\mathbf{e}^x < K$, $f(\mathbf{e}^x - K) \;=\; 0$ **et si** $\mathbf{e}^x \geqslant K$, $f(\mathbf{e}^x - K) \;=\; \mathbf{e}^x - K$
et conclusion : $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) = \dfrac{1}{v\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathbf{e}^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\, v^2}\right)\, dx$

12. *a)* Montrer l'égalité :

$$\pi_K \ = \ \exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{v^2 + m - \ln(K)}{v}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right)$$

- **1 pt : d'après *10.c)* :** $\pi_K \ = \ \mathbf{e}^{-r}\ \mathbb{E}\big(f(C-K)\big)$
- **1 pt : d'après la question précédente :** $\mathbb{E}\big(f(C-K)\big) = \displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathbf{e}^x - K)\,\varphi_{m,v^2}(x)\ dx =$ $\displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathbf{e}^x\,\varphi_{m,v^2}(x)\ dx - K\ \int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m,v^2}(x)\ dx$
- **3 pts :**
  × **1 pt :** $\displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m,v^2}(x)\ dx \ = \ 1 - \Phi_{m,v^2}\big(\ln(K)\big)$
  × **1 pt : or :** $\Phi_{m,v^2}(x) = \Phi\left(\dfrac{x-m}{v}\right)$
  × **1 pt :** $1 - \Phi\big(\ln(K)\big) \ = \ 1 - \Phi\left(\dfrac{\ln(K) - m}{v}\right) \ = \ \Phi\left(-\dfrac{\ln(K) - m}{v}\right) \ = \ \Phi\left(\dfrac{m - \ln(K)}{v}\right)$
- **3 pts :**
  × **2 pts :** $\mathbf{e}^x\,\varphi_{m,v^2}(x) = \exp\left(m + \dfrac{v^2}{2}\right)\ \varphi_{m+v^2,v^2}(x)$
  × **1 pt :** $\displaystyle\int_{\ln(K)}^{+\infty} \mathbf{e}^x\,\varphi_{m,v^2}(x)\,dx = \mathbf{e}^{m+\frac{v^2}{2}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} \varphi_{m+v^2,v^2}(x)\,dx = \mathbf{e}^{m+\frac{v^2}{2}}\,\Big(1 - \Phi_{m+v^2,v^2}\big(\ln(K)\big)\Big)$

b) On suppose que $m = r - \dfrac{v^2}{2}$, ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques.
Établir la formule de Black-Scholes :

$$\pi_K \ = \ \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} + \frac{v}{2}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} - \frac{v}{2}\right)$$

- **1 pt :** $m - r + \dfrac{v^2}{2} = 0$
- **1 pt :** $\dfrac{v^2 + m - \ln(K)}{v} = \dfrac{r - \ln(K)}{v} + \dfrac{v}{2}$
- **1 pt :** $\dfrac{m - \ln(K)}{v} = \dfrac{r - \ln(K)}{v} - \dfrac{v}{2}$

13. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut x, où x est un réel strictement positif. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r - \theta)$.
On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$x \ = \ \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)$$

On définit alors la fonction $\Psi : v \mapsto \Phi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi\left(\dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $v > 0$:

$$\Psi'(v) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)^2\right)$$

Dresser le tableau de variations de Ψ en y faisant figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
On distinguera les cas $\theta > 0$ et $\theta \leqslant 0$.

- **1 pt :** $\Psi = \Phi \circ f_1 - \mathbf{e}^{-\theta}\, \Phi \circ f_2$
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $f_1 : v \mapsto \dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}$ **est** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$ **et telle que :** $f_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$
  - × **1 pt :** Φ **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **car elle est une primitive de** $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$ **qui est continue sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : de même,** $\Phi \circ f_2$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\Psi'(v) = f_1'(v) \times \Phi' \circ f_1(v) - \mathbf{e}^{-\theta}\, f_2'(v) \times \Phi' \circ f_2(v)$

  $= \left(-\dfrac{\theta}{v^2} + \dfrac{1}{2}\right) \times \varphi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) - \mathbf{e}^{-\theta} \left(-\dfrac{\theta}{v^2} - \dfrac{1}{2}\right) \times \varphi\left(\dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}\right)$
- **1 pt :** $\mathbf{e}^{-\theta}\, \varphi\left(\dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(2\theta + \dfrac{\theta^2}{v^2} - \theta + \dfrac{v^2}{4}\right)\right) = \varphi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right)$
- **1 pt :** $\Psi'(v) = \varphi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right)$
- **1 pt :** $\Psi'(v) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right)^2\right) > 0$ **donc** Ψ **strictement croissante**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{v \to +\infty} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) = \lim_{u \to +\infty} \Phi(u) = 1$ **et** $\displaystyle\lim_{v \to +\infty} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) = \lim_{w \to -\infty} \Phi(w) = 0$ **donc** $\displaystyle\lim_{v \to +\infty} \Psi(v) = 1 - \mathbf{e}^{-\theta} \times 0 = 1$
- **1 pt : si** $\theta \leqslant 0$**,** $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) = \lim_{u \to -\infty} \Phi(u) = 0$

  et $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) = \lim_{w \to -\infty} \Phi(w) = 0$ **donc** $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Psi(v) = 0 - \mathbf{e}^{-\theta} \times 0 = 0$
- **1 pt : si** $\theta > 0$**,** $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) = \lim_{u \to +\infty} \Phi(u) = 1$

  et $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) = \lim_{w \to +\infty} \Phi(w) = 1$ **donc** $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Psi(v) = 1 - \mathbf{e}^{-\theta} \times 1 = 1 - \mathbf{e}^{-\theta}$

b) Déterminer pour quelles valeurs de x il existe une volatilité implicite et prouver alors qu'elle est unique.
En conclure finalement que l'on peut définir *la* volatilité implicite si et seulement si :

$$f\left(1 - \mathrm{e}^{-\theta}\right) < x < 1$$

- **1 pt :** $\Psi(]0, +\infty[) = \left]\displaystyle\lim_{v \to 0} \Psi(v), \lim_{v \to +\infty} \Psi(v)\right[= \left]\displaystyle\lim_{v \to 0} \Psi(v), 1\right[$ **car** Ψ **est continue et strictement croissante sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : comme** $1 - \mathbf{e}^{-\theta} > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta$
- **1 pt : et** $f(1 - \mathbf{e}^{-\theta}) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } \theta \leqslant 0 \\ 1 - \mathbf{e}^{-\theta} & \textbf{si } \theta > 0 \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\lim_{v \to 0} \Psi(v) = f(1 - \mathbf{e}^{-\theta})$
- **1 pt : ainsi** Ψ **réalise une bijection de** $]0, +\infty[$ **sur** $\left]f(1 - \mathbf{e}^{-\theta}), 1\right[$**.**

  L'équation $\Psi(v) = x$ **admet donc une unique solution ssi** $x \in \left]f(1 - \mathbf{e}^{-\theta}), 1\right[$**. Autrement dit, il existe une unique volatilité implicite ssi** $x \in \left]f(1 - \mathbf{e}^{-\theta}), 1\right[$**.**

  On peut donc définir *la* **volatilité implicite si et seulement si :** $f(1 - \mathbf{e}^{-\theta}) < x < 1$**.**