TP10 : Tracés de solutions d'équations différentielles en **Python**

Objectif du TP : il s'agit d'illustrer les concepts vus dans le cours de mathématiques. Aucune connaissance n'est exigible sur les fonctions **Python** que l'on va utiliser dans ce TP.

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On s'intéresse au système différentiel $X' = AX$. On rappelle qu'une solution de ce système est donnée par trois fonctions réelles x_1, x_2 et x_3. On souhaite tracer plusieurs trajectoires de solutions pour observer leur comportement vis à vis des états équilibres du système. Cependant, les trajectoires évoluant dans un espace à 3 dimensions ($\mathbb{R}^3$), il n'est pas aisé de les représenter. Ainsi, nous choisissons de les représenter en traçant dans le même repère les 3 graphes des fonctions x_1, x_2 et x_3.

I. Cas où A possède 3 valeurs propres strictement négatives

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Rappeler comment fonctionne la fonction **Python** `al.eig`.

La fonction `al.eig` prend en argument une matrice et renvoie une liste qui contient les valeurs propres de cette matrice ainsi qu'un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.

- Recopier le programme **Python** suivant et l'exécuter.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[-1, 1 , -1], [-4, -5, 4], [-2, -1, 0]])
L = al.eig(A)
print(L[0])
```

Recopier ce qu'affiche la console **Python**. Que peut-on en déduire ?

La console affiche `[-1. -2. -3.]`.
Ces trois nombres sont les valeurs propres de la matrice A.
D'où $\operatorname{Sp} A = \{-1, -2, -3\}$

- Que peut-on conjecturer sur les trajectoires des solutions du système différentiel $X' = AX$?.

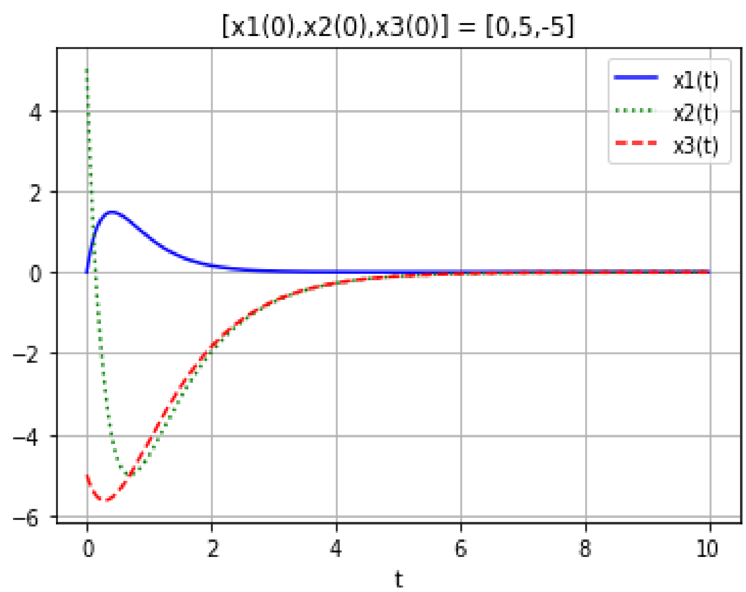
Les valeurs propres sont toutes les trois strictement négatives donc toutes les solutions vont converger vers l'unique état d'équilibre du système : le point $(0, 0, 0)$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Pour représenter les graphes de chacune des fonctions x_1, x_2 et x_3, on utilise le programme qui suit :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
# Définition du système
def syst(y, t, a11, a12, a13, a21, a22, a23, a31, a32, a33):
    x1, x2, x3 = y
    dydt = [a11*x1+ a12*x2+ a13*x3, a21*x1+ a22*x2+ a23*x3, a31*x1+ a32*x2+ a33*x3]
    return dydt
# Définition de la matrice A
a11, a12, a13 = -1, 1 , -1
a21, a22, a23 = -4, -5, 4
a31, a32, a33 = -2, -1, 0
# Condition initiale
y0 = [0,5,-5]
# Intervalle de temps pour le tracé
t = np.linspace(0, 10, 501)
# Création de la solution X
sol = odeint(syst, y0, t, args=(a11, a12, a13, a21, a22, a23, a31, a32, a33))
# Configuration du tracé
plt.plot(t, sol[:, 0], 'b-', label='x1(t)')
plt.plot(t, sol[:, 1], 'g:', label='x2(t)')
plt.plot(t, sol[:, 2], 'r--', label='x3(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.title(f'[x1(0),x2(0),x3(0)] = [{y0[0]},{y0[1]},{y0[2]}]')
plt.grid()
plt.show()
```

L'exécution du programme précédent affiche le résultat suivant :



- Faire varier les trois paramètres de la condition initiale `y0` entre -10 et 10. Que remarque-t-on ?

Toutes les solutions convergent « rapidement » vers 0. C'est dû aux valeurs propres strictement négatives qui entraînent une décroissance exponentielle des solutions.

II. Cas où A possède 1 valeur propre strictement positive et 2 valeurs propres strictement négatives

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Recopier le programme **Python** suivant et l'exécuter.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[0, 1 , -1], [-6, -5, 6], [-4, -2, 3]])
I = np.eye(3)
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+I))
print(al.matrix_rank(A+2*I))
```

Recopier ce qu'affiche la console **Python**. A quoi correspondent ces nombres ? Que peut-on en déduire ?

La console affiche trois fois le nombre 2 en colonne.
Cela veut dire que $\mathrm{rg}(A - I) = \mathrm{rg}(A + I) = \mathrm{rg}(A + 2I) = 2$.
On en déduit que $\mathrm{Sp}\, A = \{1, -1, -2\}$

Reprendre le programme de la partie précédente en

- mettant à jour la matrice A
- remplaçant la ligne 16 par : `t = np.linspace(0, 2, 501)`

- Faire varier la condition initiale puis décrire le comportement en $+\infty$ des fonctions x_1, x_2, x_3. On testera en particulier les conditions initiales `y0 = [1,0,1]`, `y0 = [-1, 2 ,0]` et `y0 = [0,1,1]`.

La fonction x_1 converge tout le temps vers 0 en $+\infty$.
La plupart du temps, les fonctions x_2 et x_3 divergent vers l'infini en $+\infty$.

On souhaite comprendre cette observation via les résultats théoriques du cours. On admet que

- $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
- $U_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.
- $U_{-2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

► Rappeler la forme générale des solutions du système $X' = AX$.

La matrice A possède 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
D'après le cours, les solutions générales sont de la forme

$$X(t) = \alpha e^{t} U_1 + \beta e^{-t} U_{-1} + \gamma e^{-2t} U_{-2} \qquad \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

► Exprimer $x_1(t)$ à l'aide de la formule générale puis montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = 0$.

En prenant la première coordonnée dans l'équation précédente, on obtient :

$$x_1(t) = \alpha e^{t} \times 0 + \beta e^{-t} \times 1 + \gamma e^{-2t} \times (-1) = \beta e^{-t} - \gamma e^{-2t}$$

Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-2t} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = 0$.

► Exprimer $x_2(t)$ à l'aide de la formule générale.

En prenant la deuxième coordonnée dans l'équation précédente, on obtient :

$$x_2(t) = \alpha e^{t} \times 1 + \beta e^{-t} \times 0 + \gamma e^{-2t} \times 2 = \alpha e^{t} + 2\gamma e^{-2t}$$

► En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t)$ en fonction des valeurs des différents paramètres.

- Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = 0$.
- Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = -\infty$.
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = +\infty$.

► De manière analogue, calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x_3(t)$ en fonction des valeurs des différents paramètres.

Tout d'abord, $x_3(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t}$. Ainsi,
- Si $\alpha = 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x_3(t) = 0$.
- Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x_3(t) = -\infty$.
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x_3(t) = +\infty$.