Sujets de révisions
Analyse (fonctions, suites, séries, intégrales)

EML 2023 - fonction d'une variable, suite récurrente (cas où la fonction f est décroissante)

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. *Informatique.*

a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ...... :
        u = exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

b) On considère maintenant la fonction **Python** :

```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u = exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

c) Écrire une fonction **Python** qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$.

a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α.

c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \simeq 2,7$.

4. ***a)*** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question ***3.b)***.

d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

EML 2018 - fonction d'une variable, suite récurrente, intégrale fonction de ses bornes, fonction de deux variables

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

4. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de b à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
import numpy as np
a,b = 2,4
while __________________ :
    c = (a + b) / 2
    if ___________________ :
        b = c
    else :
        a = c
print(_____)
```

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

6. Écrire une fonction **Python** nommée `suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

7. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

8. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c) Montrer que la série $\sum (u_n - b)$ est convergente.

9. *a)* Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 0
3     while ...........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

b) Écrire une fonction **Python** nommée `Somme(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - b)$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

10. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

11. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

12. Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

13. **a)** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

14. Compléter le script suivant pour qu'il calcule une approximation de $\Phi(2)$. On implémentera la méthode de Monte-Carlo :

```
def f(x):
    return _______________

N = 10**4
S = 0
for i in range(N):
    U = rd.uniform(2,4)
    S = ______________
print(_______)
```

15. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = \,]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \,]0, +\infty[^2, \;\; H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

16. **a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question ***2.***

17. **a)** Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1 \, \lambda_2 & = & a-1 \end{cases}$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

18. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

ECRICOME 2022 - fonction d'une variable, suite récurrente, fonction de deux variables

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) \ = \ \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) \ = \ \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

c) Démontrer : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\ h(x)\, g(x)$.

d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Démontrer :

$$g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\ \ln(x)$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et : $u_n > 0$.

5. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n + 1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ `u0`.

6. ***a)*** Étudier le signe de $(x - 1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

b) Démontrer : $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x, y) \ = \ x^{y-\frac{1}{x}} \ = \ \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

11. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

12. Démontrer :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \partial_1(f)(x, y) & = & \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ f(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) & = & \ln(x)\, f(x, y) \end{array} \right.$$

13. Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a.

14. Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

16. Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

ECRICOME 2012 - fonction d'une variable définie par morceaux, continuité, dérivabilité, développement limité, suite d'intégrales

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Écrire le développement limité de $f(x)$ l'ordre 2, au voisinage de 0 En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u} \, du$$

5. Démontrer, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx$.

7. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u} \, du - u_n \leqslant \int_0^1 f(x) \, dx$$

8. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

ECRICOME 2020 - fonction d'une variable, intégrale fonction de ses bornes, suite implicite, fonction de deux variables

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f_n.

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \ \geqslant\ n\,(t^2-1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ =\ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

8. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.

11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.

12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.

13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

EDHEC 2021 - fonction de deux variables, fonction d'une variable, suite implicite

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Déterminer les points critiques de f.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

EDHEC 2020 - suites d'intégrales, série, suite extraite, relations de récurrence

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
a = 1/2
b = np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a = ------
    b = ------
print(b)
```

4. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6. ***a)*** Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

b) En déduire la valeur de J_1.

7. En utilisant les questions ***5.*** et ***6.***, compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
J = np.log(2)
for k in range(1,n):
    J = ------
print(--------)
```

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9. ***a)*** Utiliser les questions ***4.*** et ***5.*** pour déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question ***5.*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \; = \; (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n)$$

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ ***b)*** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ ***c)*** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$

EDHEC 2009 (voie S) - intégrale à paramètre, suite d'intégrales, développement limité, série

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. **a.** Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et en conlure qu'elle converge.

2. **a.** Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$.

3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$.

c. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\dfrac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

d. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et on admet qu'alors $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

On rappelle qu'à l'aide de la bibliothèque `numpy` (importée sous l'alias `np`), on accède à la commande `np.pi` qui renvoie une valeur approchée du nombre π.

Ecrire une fonction **Python** qui

- prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.