Corrigés des sujets de révisions
Analyse (fonctions, suites, séries, intégrales)

EML 2023 - fonction d'une variable, suite récurrente (cas où la fonction f est décroissante)

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.
Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}x - \mathrm{e}^{-x}}{x^2} = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x+1}{x^2}$$

$x > 0$ donc $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$. On a également $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par produit,

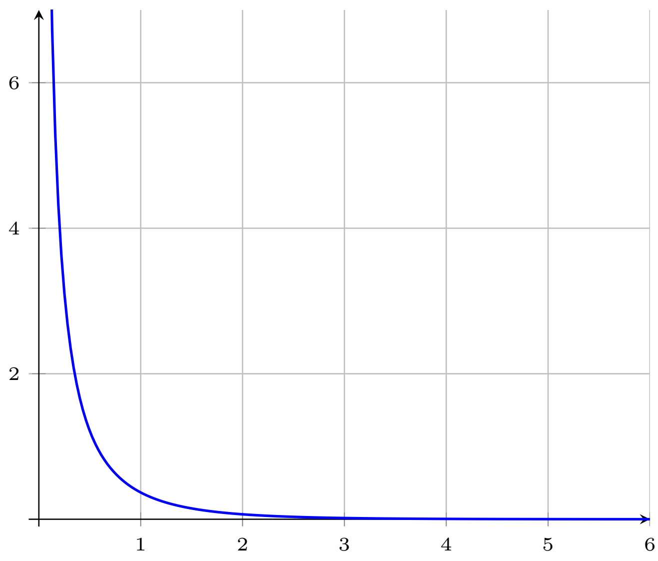
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$
Variations de f	||	$+\infty \searrow 0$

Commentaire

Le graphe de f n'était pas demandé, mais cela aurait pu faire l'objet d'une question. On le donne quand même ci-dessous.



□

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « u_n est correctement défini et $u_n > 0$ »
Initialisation :
$u_0 = 1$ est bien défini et $1 > 0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini car f est définie sur $]0, +\infty[$. De plus, $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} > 0$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
D'où le résultat par récurrence. □

2. Informatique.

a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ...... :
        u = exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

Démonstration. Il s'agit d'un algorithme classique de recherche du plus petit entier n vérifiant une condition donnée. Il faut écrire la négation de la condition dans la boucle `while` et incrémenter n tant que cette négation est vérifiée.

```python
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u <= a:
        u = exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

□

b) On considère maintenant la fonction **Python** :

```python
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u = exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

Commentaire

L'énoncé comportait ici une grosse coquille, qui changeait complètement la fonction. Il était écrit dans la version initiale

```python
    while u<a :
```

ce qui revenait quasiment à faire le même programme qu'à la question précédente. Pour réussir à corriger l'énoncé, il fallait comprendre que l'on voulait ici trouver le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant a$. Cela se comprend en regardant/devinant la fin de l'exercice : la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers 0. De plus, c'est cohérent avec l'appel `fonc_2(10**(-6))` qui se fait avec une valeur de `a` très proche de 0.

Démonstration. On en déduit que $u_6 > 10^6$ et $u_5 \leqslant 10^{-6}$. On conjecture alors que

$$\boxed{u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

□

c) Écrire une fonction **Python** qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
def suite(n):
    from numpy import exp
    u=1
    for k in range(n):
        u = exp(-u)/u
    return u
```

□

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$.

a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

Démonstration. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 2x < 0$$

Ainsi,

- g est continue sur $[0, +\infty[$ (car dérivable sur $[0, +\infty[$)
- g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

On en déduit que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or,

$$g([0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} g(x), g(0) \right] =]-\infty, 1]$$

d'où le résultat. □

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α.

Démonstration. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = x \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = x^2 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Or, $0 \in]-\infty, 1]$ donc 0 admet un unique antécédent par g dans $[0, +\infty[$, que l'on note α. Puisque $g(0) = 1$, on en déduit que $\alpha \neq 0$. D'où

$$\boxed{\alpha \in]0, +\infty[.}$$

□

c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e \simeq 2,7$.

Démonstration.

- Méthode 1 : classiquement, on doit comparer $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $g(\alpha)$ et $g(1)$ puis conclure par stricte monotonie.
  Tout d'abord : $g(\alpha) = 0$ par définition.
  Ensuite $g(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1^2 = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} < 0$.
  Enfin, $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{e}}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{e}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{e}}\mathrm{e}^2} > 0$ car $2 > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
  D'où
  $$g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) > g(\alpha) > g(1)$$
  et par stricte décroissance de g sur $[0, +\infty[$, on en déduit que
  $$\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1}$$
- Méthode 2 : on pouvait s'épargner quelques calculs en remarquant que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = f(1)$
  On commence comme précédemment par démontrer que $\alpha < 1$ en comparant $g(\alpha)$ et $g(1)$.
  Par stricte décroissance de f sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $f(\alpha) > f(1)$. Or, $f(\alpha) = \alpha$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

□

4. a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

Démonstration. $u_0 = 1$ donc $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc

$$u_2 = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}}$$

Or, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} > 0$, donc $u_2 > \mathrm{e}^0 = 1 = u_0$. □

b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$ »
Initialisation :
$u_2 > u_0$ d'après la question précédente. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a, par hypothèse de récurrence, $u_{2n+2} \geqslant u_{2n} > 0$. Or, la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc, en composant deux fois par f, on obtient successivement

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leqslant f(u_{2n}) = u_{2n+1}$$

puis

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) \geqslant f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2(n+1)} \geqslant u_{2n}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

□

c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions ***1.b)*** et ***4.b)*** : $u_{2n+2} \geqslant u_{2n} > 0$. Or, f est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc $0 < u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leqslant f(u_{2n}) = u_{2n+1}$. Ainsi,

- la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0

donc, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

5. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.

Démonstration. Soit $x > 0$.

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{\mathrm{e}^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}}{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x\mathrm{e}^{x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}$$

□

b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et $f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$ (cf question ***1.a)***) donc h est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ car elle y coïncide avec $f \circ f$.

Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc, par composition de limites,

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = 0 = h(0)$$

donc h est continue en 0. Finalement,

$$\boxed{h \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

□

c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α, α étant le réel introduit à la question ***3.b)***.

Démonstration. $h(0) = 0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x) = x$ sur $[0, +\infty[$. Il reste à résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
h(x) = x &\iff x\mathrm{e}^{x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = x \\
&\iff \mathrm{e}^{x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} = 1 && \textit{car } x \neq 0 \\
&\iff x - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = 0 \\
&\iff x = f(x) \\
&\iff x = \alpha && \textit{cf question } \boldsymbol{3.b)}
\end{aligned}$$

□

d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1})$. On sait que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge (cf question ***4.c)***). Notons ℓ sa limite. On sait que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 (toujours question ***4.c)***) donc $\ell \geqslant 0$.

On en déduit que

- $u_{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite)
- $u_{2n+3} = h(u_{2n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(\ell)$ (par continuité de h en $\ell \in [0, +\infty[$, cf question ***5.b)***)

Par unicité de la limite, on a alors $\ell = h(\ell)$. Donc soit $\ell = 0$, soit $\ell = \alpha$ (cf question ***5.c)***).

Or, on sait que $u_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et par décroissance de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, il vient : $\ell \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. De plus, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$ (cf question ***3.c)***) donc $\ell < \alpha$. On a donc nécessairement

$$\boxed{\ell = 0.}$$

□

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Démonstration. Supposons que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Alors, par théorème de convergence monotone (la suite est croissante, cf question ***4.b)***), on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ' sa limite.

Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente, on obtient que ℓ' est un point fixe de h. Donc soit $\ell' = 0$, soit $\ell' = \alpha$.

Or $u_0 = 1$ et par croissance de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, il vient : $\ell' \geqslant 1 > \alpha > 0$. C'est absurde.

On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée et } u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

□

EML 2018 - fonction d'une variable, suite récurrente, intégrale fonction de ses bornes, fonction de deux variables

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

  Alors, comme $x > 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$$

  On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x}\Big)$$

    De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$.

Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$.

$$f(]0,1[) \;=\; \left] \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x) \right[\;=\;]1,+\infty[$$

Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  × continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  × strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \;=\; \left] \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x) \right[\;=\;]1,+\infty[$$

Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.

$$\boxed{\text{Finalement, l'équation } f(x)=2 \text{ admet exactement 2 solutions sur }]0,+\infty[\text{ notées } a \text{ et } b \text{ telles que } 0<a<1<b.}$$

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$,
  × $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2-\ln(2))$.
  De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et ainsi : $f(4) = 2(2-\ln(2)) \simeq 2,6 \geqslant 2$.
  × $f(b) = 2$.

  On a donc : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
- Notons g la réciproque de f sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. En appliquant g de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(2)\big) & \leqslant & g\big(f(b)\big) & \leqslant & g\big(f(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 & \leqslant & b & \leqslant & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } b \in [2,4].}$$

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème. □

4. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de b à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```python
import numpy as np
a,b = 2,4
while ____________________ :
    c = (a + b) / 2
    if ____________________ :
        b = c
    else :
        a = c
print(_____)
```

Démonstration.

```python
import numpy as np
a,b = 2,4
while b-a > 10**(-4) :
    c = (a + b) / 2
    if c-np.log(c) > 2 :
        b = c
    else :
        a = c
print(c)
```

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad$ où $\quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array} \right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question *3.*, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array} \right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.

  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.

$$\begin{array}{rcccl}
\text{- Comme} & u_n & \geqslant & b & \\
\text{alors} & \ln(u_n) & \geqslant & \ln(b) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{et} & \ln(u_n)+2 & \geqslant & \ln(b)+2 & \\
 & \shortparallel & & & \\
 & u_{n+1} & & &
\end{array}$$

Enfin, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Ainsi : $\ln(b) = b - 2$.
On obtient alors :

$$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

6. Écrire une fonction **Python** nommée `suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```python
def suite(n):
    u = 4 # Initialisation de la variable u
    for k in range(n):
        u = np.log(u) + 2 # On met à jour n fois la variable u
    return u
```

□

7. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \ln(u_n) + 2 - u_n \ = \ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ = \ f(b) - f(u_n)$$

Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).

Tout d'abord	u_{n+1}	$\leqslant$	u_n	*(par hypothèse de récurrence)*
donc	$\ln(u_{n+1})$	$\leqslant$	$\ln(u_n)$	*(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*
et	$\ln(u_{n+1}) + 2$	$\leqslant$	$\ln(u_n) + 2$	
	$\parallel$		$\parallel$	
	u_{n+2}		u_{n+1}	

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$$

- \- Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
  Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  \- Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
  Donc, par continuité de $\ln$ sur $]0, +\infty[$: $\ell = \ln(\ell) + 2$. Or :

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \ \Leftrightarrow\ \ell - \ln(\ell) = 2 \ \Leftrightarrow\ f(\ell) = 2$$

Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction h est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. Alors $h'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in [b, +\infty[$, $|h'(x)| = h(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

$$\forall x \in [b, +\infty[,\ h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  × h est dérivable sur $[b,+\infty[$,
  × $\forall x \in [b,+\infty[,\ |h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in [b,+\infty[^2,\ \mid h(y) - h(x) \mid \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b,+\infty[$ et $x = b \in [b,+\infty[$, on obtient :

$$h(u_n) - h(b) \ = \ \mid h(u_n) - h(b) \mid \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - b| \ = \ \frac{1}{2}\ (u_n - b)$$

  Or :
  × $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

  ▶ **Initialisation** :
  D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
  D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
  Ainsi :
$$\begin{array}{rcll} u_0 - b & = & 4 - b & \\ & \leqslant & 4 - 2 & \textit{(car } b \geqslant 2 \textit{ d'après la question 3)} \\ & = & 2 \ = \ \dfrac{1}{2^{0-1}} & \end{array}$$
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▶ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).
  D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :
$$u_{n+1} - b \ \leqslant \ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant \ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

c) Montrer que la série $\sum (u_n - b)$ est convergente.

Démonstration. On a :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
- la série $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ donc converge

Par critère de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, la série $\sum (u_n - b)$ est convergente. □

9. a) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  def valeur_approchee(epsilon):
2      n = 0
3      while ..........
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$

Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.

- On complète alors le programme **Python** de la façon suivante :

```
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon
```

□

b) Écrire une fonction **Python** nommée `Somme(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} (u_k - b)$.

Démonstration.

```
def Somme(n):
    u = 4 #initialisation de la variable u
    for k in range(n):
        u = np.log(u) + 2 #on met à jour n fois la variable u
    return u
```

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

10. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
  En effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$.
  Donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- On obtient alors :
  $$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$
  Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :
  × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - telle que $h(]0, +\infty[) \subset\ ]0, +\infty[$.

  × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$
- Soit $x \in\ ]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2\, G'(2x) - G'(x) \ = \ 2\, \frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \ = \ \frac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \ = \ \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

11. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\Phi'(x) \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))} \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{f(x)\,f(2x)}$$

Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) \geqslant 0$ et $f(2x) \geqslant 0$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2)-\ln(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(2) \geqslant \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \geqslant x \end{aligned}$$

(car la fonction $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

$\square$

12. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in]0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***1.*** : $\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) \geqslant 1 > 0$.
  On en déduit : $\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{f(t)} > 0$.
  Ainsi, par positivité de l'intégration :
  $$0 \;\leqslant\; \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt \;=\; \Phi(x)$$
- Ensuite, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, pour tout $t \in]0,+\infty[$:
  $$f(t) \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$
  Par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées : $x \leqslant 2x$ car $x > 0$), on obtient :
  $$\underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt}_{=\,\Phi(x)} \;\leqslant\; \int_x^{2x} 1\,dt \;=\; [\,t\,]_x^{2x} \;=\; 2x-x \;=\; x$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$,

1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à-dire montrer :
$$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,

2) on utilise en suite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont bien ordonnées, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
$$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$

□

13. ***a)*** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi, \text{ vérifie } \Phi(0)=0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***8.*** :
$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

14. Compléter le script suivant pour qu'il calcule une approximation de $\Phi(2)$. On implémentera la méthode de Monte-Carlo :

```
def f(x):
    return ________________

N = 10**4
S = 0
for i in range(N):
    U = rd.uniform(2,4)
    S = _______________
print(_______)
```

Démonstration.

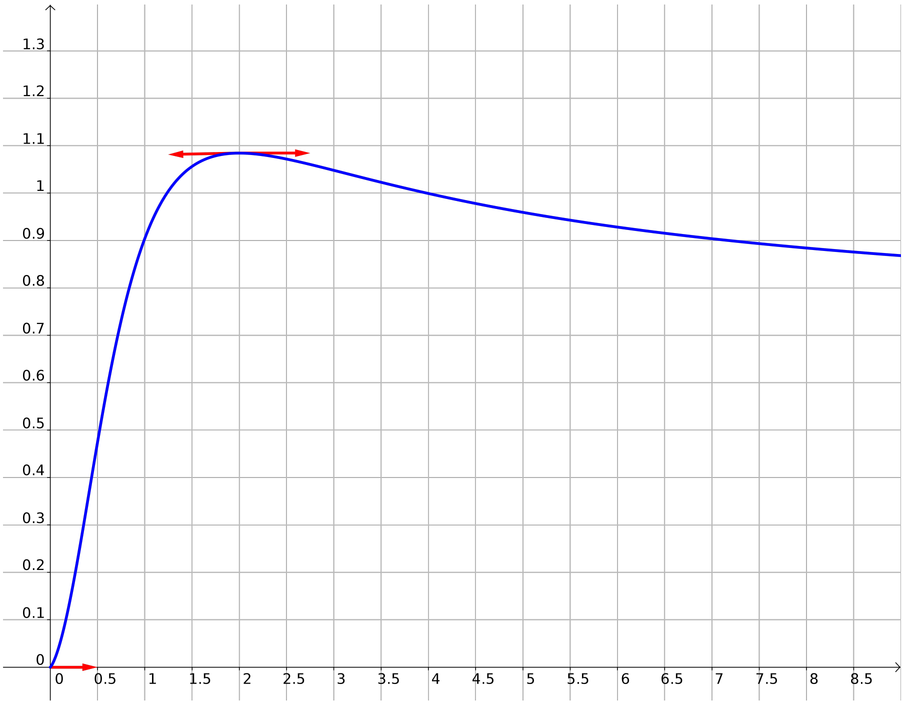
```
def f(x):
    return x-np.log(x)

N = 10**4
S = 0
for i in range(N):
    U = rd.uniform(2,4)
    S = S + 2/f(U)
print(S/N)
```

□

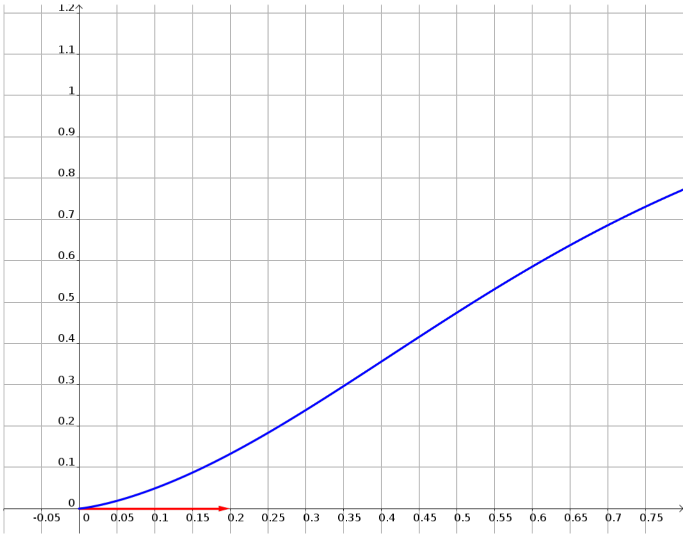
15. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici.
Cela est simplement dû à l'échelle de la figure. Si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. □

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = \,]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \,]0, +\infty[^2, \;\; H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

Commentaire

On peut remarquer que cette fonction H est en fait définie sur $\mathbb{R}^2$. Cela sera d'ailleurs utile plus tard dans l'énoncé.
Elle est même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Démontrons le.

- La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{2} - xy - 2x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
- La fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : (x, y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $h_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : u \mapsto \mathrm{e}^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction H est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

16. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U.

Démonstration.

- La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur U.

- Soit $(x, y) \in U$.

$$\partial_1(H)(x,y) = \frac{\cancel{2}\,x}{\cancel{2}} - y - 2 = x - y - 2$$
$$\partial_2(H)(x,y) = -x + e^y$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in U,\ \partial_1(H)(x,y) = x - y - 2, \quad \partial_2(H)(x,y) = e^y - x}$$

Commentaire

On trouve bien sûr les mêmes dérivées premières sur $\mathbb{R}^2$.

□

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question ***2.***

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.
Le couple (x, y) est un point critique de H si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(H)(x,y) &=& 0 \\ \partial_2(H)(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ e^y - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ e^y = x \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ e^{x-2} = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - 2 = \ln(x) \end{array}\right. \qquad \textit{(car } x > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - \ln(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***2.***, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $]0, +\infty[$: les réels a et b.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = a - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = b - 2 \\ x = b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, comme a et b sont solutions de l'équation $f(x) = 2$, on a :

$$f(b) = 2 \Leftrightarrow b - \ln(b) = 2 \Leftrightarrow \ln(b) = b - 2$$

De même : $\ln(a) = a - 2$. D'où :

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } H &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \ln(a) \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = \ln(b) \\ x = b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x,y) = (a, \ln(a)) \quad \texttt{OU} \quad (x,y) = (b, \ln(b))
\end{aligned}$$

Or, comme $a \in]0, 1[$, alors $\ln(a) < 0$. Donc $(a, \ln(a)) \notin U$.
On en déduit que le couple $(a, \ln(a))$ n'est pas un point critique de H sur U.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } H \text{ admet un unique point critique } \underline{\text{sur } U} : (b, \ln(b)).}$$

Commentaire

- La réponse à cette question semble contredire l'énoncé.
  En fait, le couple $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de H. Seulement, c'est un point critique de H sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.
  Montrer que $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de H sur $\mathbb{R}^2$ demande peu d'adaptations dans la preuve précédente.
  Le seul point problématique est la composition par la fonction ln dans la première série d'équivalences :
  $$\left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ e^{x-2} = x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ x-2 = \ln(x) \end{array} \right.$$
  En effet, il faut démontrer auparavant que $x > 0$ (a priori : $x \in \mathbb{R}$).
  Cependant, d'après le système $\left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ e^{y} = x \end{array} \right.$, on en déduit en particulier que $x > 0$, et on peut donc continuer la preuve comme précédemment.
- Dans la suite, lorsque l'on étudiera le point critique $(a, \ln(a))$, on se placera donc sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.

□

17. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

Démonstration.

- La fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla^2(H)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(H)(x,y) & \partial^2_{1,2}(H)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(H)(x,y) & \partial^2_{2,2}(H)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^{y} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc : } M_a = \nabla^2(H)(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^{\ln(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}$$

Commentaire

On rappelle que $(a, \ln(a)) \notin U$.
Il est donc indispensable de déterminer $\nabla^2(H)$ sur $\mathbb{R}^2$ et non sur U.

□

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1 \, \lambda_2 & = & a-1 \end{array} \right.$$

Démonstration.

- La matrice M_a est une matrice réelle symétrique. Elle est donc diagonalisable.
  On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(M_a - \lambda \cdot I_2) & = & \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda) - 1 \\ & = & \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \end{array}$$

On en déduit que la matrice $M_a - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) = 0 \quad (*)$$

- Or λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de M_a, donc :

$$(M_a - \lambda \cdot I_2) \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Ainsi les réels λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation $(*)$. D'où :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \ = \ (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ = \ \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\, \lambda_2$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2 en λ,
on obtient le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a+1 \\ \lambda_1\, \lambda_2 = a-1 \end{array}\right.$

- Montrons maintenant que λ_1 et λ_2 sont distincts.
Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $\lambda_1 = \lambda_2$.
D'après le système précédent, on obtient en particulier :

$$\lambda_1^2 \ = \ \lambda_1\, \lambda_2 \ = \ a - 1$$

Or, d'après la question ***2.***, on a : $a < 1$. Donc $a - 1 < 0$.
On en déduit : $\lambda_1^2 < 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, λ_1 et λ_2 sont distincts.

□

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

Démonstration.
On a montré dans la question précédente : $a - 1 < 0$. On en déduit : $\lambda_1\, \lambda_2 < 0$.
Les valeurs propres de M_a sont donc de signes opposés.

Ainsi, la fonction H n'admet pas d'extremum local au point $(a, \ln(a))$.

Commentaire

Le point $(a, \ln(a))$ est un point selle pour la fonction H.

□

18. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Démonstration.
On reprend la démarche des questions précédentes.

- On note M_b la matrice hessienne de H au point $(b, \ln(b))$. Alors :

$$M_b \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathrm{e}^{\ln(b)} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

- La matrice M_b est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
On note μ_1 et μ_2 ses valeurs propres éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(M_b - \lambda \cdot I_2) \ = \ \lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1)$$

On en déduit que la matrice $M_b - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) = 0 \quad (\star)$$

- Or μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de M_b, donc μ_1 et μ_2 sont les solutions de l'équation $(\star)$.
D'où :
$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) \ = \ (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \ = \ \lambda^2 - (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1\,\mu_2$$
$$\boxed{\text{Par identification : } \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & b+1 \\ \mu_1\,\mu_2 & = & b-1 \end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***3.*** : $b \geqslant 2$. Donc : $b-1>0$ et $b+1>0$.
On obtient alors :
  × $\mu_1\,\mu_2 > 0$.
  Donc μ_1 et μ_2 sont non nuls et de même signe.
  × $\mu_1 + \mu_2 > 0$.
  Or μ_1 et μ_2 ont même signe. Donc : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } H \text{ admet un minimum local en } (b, \ln(b)).}$$

□

ECRICOME 2022 - fonction d'une variable, suite récurrente, fonction de deux variables

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) \;=\; \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Démonstration.

- Déterminons $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \;=\; +\infty$$
  - × Par composition de limites :
  $$\lim_{x \to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \;=\; \lim_{u \to +\infty} \exp(u) \;=\; +\infty$$
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.}$$
- Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \;=\; +\infty$$
  - × Par composition de limites :
  $$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \;=\; \lim_{u \to +\infty} \exp(u) \;=\; +\infty$$
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.}$$

□

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) \;=\; \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) \;=\; \frac{1}{x} + 2 \;>\; 0 \quad \textit{(car } x > 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- La fonction h est :
  - × continu sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$),
  - × strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente.

  Ainsi h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h\big(]0, +\infty[\big)$.

$$h\big(]0, +\infty[\big) \;=\; \left] \lim_{x \to 0^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x) \right[\;=]-\infty, +\infty[$$

  Or $0 \in]-\infty, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } h(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution } \alpha \in]0, +\infty[.}$$

- Remarquons :
  - × $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = -\ln(2) + 1 - 1 = -\ln(2) < 0$,
  - × $h(\alpha) = 0$, par définition de α,
  - × $h(1) = \cancel{\ln(1)} + 2 \times 1 - 1 = 1 > 0$.

  Ainsi :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) \;<\; h(\alpha) \;<\; h(1)$$

  Or, d'après le théorème de la bijection, $h^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant h^{-1} à l'encadrement précédente, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} h^{-1}\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right) & < & h^{-1}\big(h(\alpha)\big) & < & h^{-1}\big(h(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \frac{1}{2} & & \alpha & & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{2} < \alpha < 1.}$$

□

c) Démontrer : $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x^2}\, h(x)\, g(x)$.

Démonstration.

- La fonction g est dériable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)$ qui est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que : $g_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= g_1'(x) \times g_2'\big(g_1(x)\big) \\
&= \left(\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\right) \times \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\
&= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) g(x) \\
&= \frac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2}\ g(x) \\
&= \frac{h(x)}{x^2}\ g(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{1}{x^2}\ h(x)\, g(x)}$$

□

d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudions le signe de $g'(x)$.
  - × Tout d'abord : $\dfrac{1}{x^2} > 0$.
  - × Ensuite : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) \ln(x)\right) > 0$.
  - × Enfin, d'après les questions ***2.a)*** et ***2.b***), on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction h.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

□

3. Démontrer :

$$g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\,\ln(x)$$

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\ &= \exp\left(2\,\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\big(2\,\ln(x)\big) \times \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= x^2\,\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

  On obtient :

$$g(x) - x^2 \; = \; x^2\,\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2 \; = \; x^2\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)$$

- Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. On en déduit :

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

- On en déduit :

$$g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2 \times \left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\,\ln(x).}$$

Commentaire

- On utilise dans cette question le résultat suivant :

$$\mathrm{e}^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$$

  Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, par composition de limites, on retrouve bien :

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

- Rappelons que cette formule découle de la définition de dérivabilité en 0 de la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$. En effet, la fonction φ est dérivable en 0 si et seulement si la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$ existe, et dans ce cas :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \; = \; \varphi'(0)$$

  On obtient donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \; = \; 1$. Autrement dit : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} 1$.

$\square$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et : $u_n > 0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n > 0$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$).
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
    Or la fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $g(u_n)$ est bien définie.
    On en déduit que $u_{n+1} = g(u_n)$ existe.
  - De plus :
    $$u_{n+1} \ = \ g(u_n) \ = \ \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) \ > \ 0$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et : } u_n > 0.}$$

□

5. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ `u0`.

Démonstration.
On commence par coder la fonction g.

```
def g(x):
    return np.exp( (2 - 1/x) * np.log(x) )
```

On propose ensuite la fonction **Python** suivante.

```
def Prem_Suite_u(u0,n):
    U = np.zeros(n+1)
    U[0] = u0
    for i in range(n):
        U[i+1] = g(U[i])
    return U
```

Détaillons les éléments de ce $2^{\text{ème}}$ script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `Prem_Suite_u`,
  × elle prend en paramètre les variables `u0` et `n`,

```
def Prem_Suite_u(u0,n):
```

On initialise ensuite la variable `U` au vecteur nul de taille `n`$+1$. C'est cette variable qui contiendra les `n` $+ 1$ premiers termes de la suite (u_n).

```
2       U = np.zeros(n+1)
```

On stocke ensuite dans la 1ère coordonnée de la variable `U`, la valeur du 1er terme de la suite (u_n), c'est-à-dire u_0.

```
3       U[0] = u0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 5 consistent à mettre à jour la variable `T` pour que ses coordonnées contiennent les termes successifs de la suite (u_n). Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for). À chaque itération, on met à jour une coordonnée de `U` avec la précédente à l'aide de la relation de récurrence définissant la suite (u_n).

```
4       for i in range(n):
5           U[i+1] = g(U[i])
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `U` contient les `n` $+ 1$ premiers termes de la suite (u_n). On renvoie alors `U`.

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Python**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité coder une fonction qui renvoie seulement le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite (u_n), on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
def Suite_u(u0,n):
    u = u0
    for i in range(n):
        u = g(u)
    return u
```

□

6. a) Étudier le signe de $(x-1)\ \ln(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Deux cas se présentent.

- si $x \leqslant 1$, alors :
  × d'une part : $x - 1 \leqslant 0$,
  × d'autre part, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) \leqslant 0$.
  On en déduit : $(x-1)\ \ln(x) \geqslant 0$.
- si $x > 1$, alors :
  × d'une part : $x - 1 > 0$,
  × d'autre part, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) > 0$.
  On en déduit : $(x-1)\ \ln(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (x-1)\ \ln(x) \geqslant 0.}$$

□

b) Démontrer : $\forall x > 0,\ \dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{x} &= \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{x} \\
&= \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp\big(\ln(x)\big)} \\
&= \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) \\
&= \exp\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x-1}{x}\ \ln(x)\right)
\end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $(x-1)\ \ln(x) \geqslant 0$. De plus : $x > 0$. Ainsi :

$$\frac{x-1}{x}\ \ln(x) \ \geqslant\ 0$$

Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\exp\left(\dfrac{x-1}{x}\ \ln(x)\right) & \geqslant & \mathrm{e}^0 \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\dfrac{g(x)}{x} & & 1
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{g(x)}{x} \geqslant 1}$$

□

c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente : $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
  Or : $x > 0$. Donc : $g(x) \geqslant x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) \geqslant x}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcll} g(x) = x & \Leftrightarrow & \dfrac{g(x)}{x} = 1 & \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(\dfrac{x-1}{x}\ \ln(x)\right) = 1 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x-1}{x}\ \ln(x) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & (x-1)\ \ln(x) = 0 & \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x - 1 = 0 \ \texttt{OU} \ \ln(x) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & x = 1 \ \texttt{OU} \ x = 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = x \text{ admet donc 1 comme unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) \geqslant x$.
- Or, d'après la question ***4.*** : $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = u_n$. On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} g(u_n) & \geqslant & u_n \\ \shortparallel & & \\ u_{n+1} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

▸ **Initialisation** :
D'après l'hypothèse de l'énoncé pour cette question ***8.*** : $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$).

- Tout d'abord, par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
  Or, la suite (u_n) est croissante d'après ***7***. Ainsi, par transitivité :
  $$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$
- Démontrons ensuite : $u_{n+1} \leqslant 1$, c'est-à-dire $g(u_n) \leqslant 1$.
  La question ***2.d)*** nous fournit les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (par hypothèse de récurrence) et $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (d'après ***2.b)***), deux cas se présentent :
  × si $u_n \in \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$:
  $$\begin{array}{rccccc} & \dfrac{1}{2} & \leqslant & u_n & \leqslant & \alpha \\ \text{donc} & g\left(\dfrac{1}{2}\right) & \geqslant & g(u_n) & \geqslant & g(\alpha) \end{array} \quad \textit{(par décroissance de } g \textit{ sur } \left[\tfrac{1}{2}, \alpha\right]\textit{)}$$
  Or :
  $$g\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp\left((2-2) \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp(0) = 1$$
  Ainsi : $1 \geqslant g(u_n)$.
  × si $u_n \in [\alpha, 1]$:
  $$\begin{array}{rccccc} & \alpha & \leqslant & u_n & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & g(\alpha) & \leqslant & g(u_n) & \leqslant & g(1) \end{array} \quad \textit{(par croissance de } g \textit{ sur } [\alpha, 1]\textit{)}$$
  Or :
  $$g(1) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{1}\right) \ln(1)\right) = \exp(0) = 1$$
  Ainsi : $g(u_n) \leqslant 1$.
  Finalement, on a toujours : $g(u_n) \leqslant 1$. Autrement dit : $u_{n+1} \leqslant 1$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  × croissante,
  × majorée par 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell \text{ telle que : } \ell \leqslant 1.}$$

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Par passage à la limite dans cet encadrement, on obtient : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ell \in [\tfrac{1}{2}, 1].}$$

- On sait :
  - × par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$,
  - × la fonction g est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1] \subset \mathbb{R}_+^*$.

  Ainsi, par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & g(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & & g(\ell) \end{array}$$

  On en déduit que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$.
  Or, d'après la question ***6.c)***, cette équation admet 1 pour unique solution. Comme $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$, on en déduit : $\ell = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement, la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

□

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 1$.

- ▶ **Initialisation** :
  D'après l'hypothèse de l'énoncé pour cette question ***9.*** : $u_0 > 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 1$)
  Par hypothèse de récurrence : $u_n > 1$.
  Or la suite (u_n) est croissante d'après ***7***. Ainsi, par transitivité :

$$u_{n+1} \geqslant u_n > 1$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1.}$$

□

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***7.***, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - × soit elle est majorée. Dans ce cas, la suite (u_n) est convergente.
  - × soit elle n'est pas majorée. Dans ce cas, (u_n) diverge vers $+\infty$.

  Démontrons qu'on est dans le second cas.
- Pour ce faire, on procède par l'absurde. Supposons alors que la suite (u_n) est majorée.
  - × La suite (u_n) est donc :
    - croissante,
    - majorée.

    Elle est donc convergente de limite L.

× Comme la suite (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $L \geqslant u_0$.
Or dans cette question : $u_0 > 1$. Ainsi, par transitivité : $L \geqslant u_0 > 1$.

× On sait de plus :
- par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$,
- la fonction g est continue en $L \in \,]1, +\infty[\, \subset \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par passage à la limite, on obtient : $L = g(L)$.
On en déduit que L est solution de l'équation $g(x) = x$.
Or, d'après ***6.c)***, cette équation admet 1 pour unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Absurde ! (car $L > 1$)

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ n'est donc pas majorée.}}$$

- Finalement, la suite (u_n) est :
× croissante,
× non majorée.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande ici la nature d'une suite **croissante**. Il faut donc tout de suite penser au théorème de convergence monotone (*cf* début de démonstration).
Le réflexe, pour montrer la divergence, est donc de raisonner par l'absurde en supposant que la suite est majorée (et non en supposant qu'elle est convergente).
- De manière générale, il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
× montrer qu'une suite `N'est PAS` majorée,
× montrer qu'une matrice n'admettant qu'une seule valeur propre `N'est PAS` diagonalisable. □

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Démonstration.

- Avec l'hypothèse faite dans cette question :

$$\begin{array}{lrcll} & u_0 & < & \dfrac{1}{2} & \\ \text{donc} & g(u_0) & > & g\left(\dfrac{1}{2}\right) & \textit{(par stricte décroissance de } g \textit{ sur }]0, \frac{1}{2}]) \\ \text{d'où} & u_1 & > & 1 & \textit{(d'après un calcul effectué en } \textbf{8.a)}) \end{array}$$

Comme la suite (u_n) est croissante d'après ***7.***, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 1.}$$

- En effectuant exactement la même démonstration qu'en question ***9.b)***, on peut donc conclure que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

□

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x,y) \ = \ x^{y-\frac{1}{x}} \ = \ \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$$

11. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction $f_1 : (x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car elle est la composée $f_1 = \psi \circ v_1$ de :
  - × $v_1 : (x,y) \mapsto x$ qui est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $v_1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi : u \mapsto \ln(u)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Avec un raisonnement similaire, la fonction $f_2 : (x,y) \mapsto y - \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- On en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car elle est la composée : $f = \exp \circ f_3$ de :
  - × $f_3 = f_2 \times f_1$ qui est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
    - telle que : $f_3(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - × exp qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.}$$

□

12. Démontrer :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2} \ f(x,y) \\[2ex] \partial_2(f)(x,y) & = & \ln(x)\, f(x,y) \end{array} \right.$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & \left(\dfrac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(y - \dfrac{1}{x}\right) \times \dfrac{1}{x}\right) \exp\left(\left(y - \dfrac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\[3ex] & = & \left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) f(x,y) \\[3ex] & = & \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2} \ f(x,y) \end{array}$$

× Ensuite :

$$\partial_2(f)(x,y) \;=\; \big(1 \times \ln(x)\big)\ \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \;=\; \ln(x)\, f(x,y)$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ f(x,y) \\[2mm] \partial_2(f)(x,y) & = & \ln(x)\, f(x,y) \end{array}\right.}$$

□

13. Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(x,y) est un point critique de f

$$\begin{array}{cll}
\Leftrightarrow & \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & \\[2mm]
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{array}\right. & \\[4mm]
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ f(x,y) & = & 0 \\ \ln(x)\, f(x,y) & = & 0 \end{array}\right. & \\[4mm]
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2} & = & 0 \\ \ln(x) & = & 0 \end{array}\right. & \textit{(car : } f(x,y) = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \neq 0\textit{)} \\[4mm]
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \ln(x) + x\,y - 1 & = & 0 \\ \ln(x) & = & 0 \end{array}\right. & \textit{(car : } x \neq 0\textit{)} \\[4mm]
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \ln(x) + x\,y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array}\right. & \\[4mm]
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array}\right. & \textit{(en remplaçant } x \textit{ par } 1 \textit{ dans la } 1^{\text{ère}} \textit{ ligne)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un unique point critique. Il s'agit du point } a = (1,1).}$$

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :
  $$\psi(x) \;=\; 0$$
  Cette équation ne dépend que d'une seule variable, on peut donc utiliser toutes les techniques usuelles de résolution d'équation.
  En injectant ensuite la valeur trouvée pour x dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend toujours que d'une variable (la variable y) et qu'il est donc plus simple de résoudre.

□

14. Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- D'après la question ***11.***, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
  - $\times$ Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \partial^2_{1,1}(f)(x,y) \\
= \ & \frac{\left(\frac{1}{x} + y\right) \times x^2 - \big(\ln(x) + x\,y - 1\big) \times 2\,x}{x^4} \times f(x,y) + \frac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2} \times \partial_1(f)(x,y) \\
= \ & \frac{\left(\frac{1}{x} + y\right) \times x - 2\,\big(\ln(x) + x\,y - 1\big)}{x^3}\ f(x,y) + \frac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ \partial_1(f)(x,y) \\
= \ & \frac{1 + x\,y - 2\,\ln(x) - 2\,x\,y + 2}{x^3}\ f(x,y) + \frac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ \partial_1(f)(x,y) \\
= \ & \frac{3 - x\,y - 2\,\ln(x)}{x^3}\ f(x,y) + \frac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ \partial_1(f)(x,y)
\end{aligned}$$

  - $\times$ Ensuite :

$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) \ = \ \frac{1}{x} \times f(x,y) + \frac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2} \times \partial_2(f)(x,y)$$

  - $\times$ Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) \ = \ \frac{1}{x}\ f(x,y) + \frac{\ln(x) + x\,y - 1}{x^2}\ \partial_2(f)(x,y)$$

  - $\times$ Enfin :

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) \ = \ \ln(x) \times \partial_2(f)(x,y)$$

- De plus :

$$\nabla^2(f)(1,1) \ = \ \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(1,1) & \partial^2_{1,2}(f)(1,1) \\ \partial^2_{2,1}(f)(1,1) & \partial^2_{2,2}(f)(1,1) \end{pmatrix}$$

  Or :
  - $\times$ on calcule : $f(1,1) = \exp\left(\left(1 - \frac{1}{1}\right) \ln(1)\right) = \exp(0) = 1$
  - $\times$ comme $a = (1,1)$ est un point critique de f d'après la question précédente, alors :

$$\partial_1(f)(1,1) \ = \ 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_2(f)(1,1) \ = \ 0$$

  - $\times$ On obtient :
    - $\times$ $\partial^2_{1,1}(f)(1,1) \ = \ \dfrac{3 - 1 - 2\,\ln(1)}{1^3}\ f(1,1) + \dfrac{\ln(1) + 1 - 1}{1^2}\ \partial_1(f)(1,1) \ = \ 2 \times 1 + 0 \times 0 \ = \ 2$

× $\partial^2_{2,1}(f)(1,1) \ = \ \partial^2_{1,2}(f)(1,1) \ = \ \dfrac{1}{1}\, f(1,1) + \dfrac{\ln(1)+1-1}{1^2}\, \partial_2(f)(1,1) \ = \ 1\times 1 + 0\times 0 \ = \ 1$

× $\partial^2_{2,2}(f)(1,1) \ = \ \ln(1)\ \partial_2(f)(1,1) \ = \ 0\times 0 \ = \ 0$

$$\boxed{\text{Finalement : } H = \nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

15. La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(H - \lambda\, I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (2-\lambda)\times(-\lambda) - 1 \\ & = & \lambda^2 - 2\,\lambda - 1 \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H-\lambda\, I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda^2 - 2\,\lambda - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine de } Q \end{array}$$

où Q est le polynôme de degré 2 défini par : $Q(X) = X^2 - 2\,X - 1$.

- On note Δ le discriminant du polynôme Q. Alors :

$$\Delta \ = \ (-2)^2 - 4\times 1\times(-1) \ = \ 8$$

Le polynôme Q admet donc 2 racines distinctes :

$$\lambda_1 \ = \ \frac{2+\sqrt{8}}{2} \ = \ \frac{2+2\sqrt{2}}{2} \ = \ 1+\sqrt{2}$$

$$\lambda_2 \ = \ \frac{2-\sqrt{8}}{2} \ = \ \frac{2-2\sqrt{2}}{2} \ = \ 1-\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(H) = \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}.}$$

- De plus :
  × on sait : $\lambda_1 = 1+\sqrt{2} > 0$
  × comme $1 < 2$, par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a aussi : $1 < \sqrt{2}$. D'où : $\lambda_2 = 1-\sqrt{2} < 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ n'admet pas d'extremum local en } a \text{ (c'est un point col).}}$$

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative.
  À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  × « La suite (u_n) est-elle majorée ? »
  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).
- Il s'agit donc ici de démontrer que f n'admet pas d'extremum local au point $(1, 1)$. Autrement dit, il faut démontrer que les valeur propres de la matrice $H = \nabla^2(f)(1, 1)$ sont non nulles et de signe contraire.

□

16. Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, un extremum global de f doit être un extremum local de f.
- Ensuite, un extremum local de f doit être un point critique de f.
  Ainsi, le seul extremum local possible de f est le point a.
- Enfin, d'après la question précédente, le point a n'est pas extremum local de f.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'admet donc pas d'extremum global sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.}$$

□

ECRICOME 2012 - fonction d'une variable définie par morceaux, continuité, dérivabilité, développement limité, suite d'intégrales

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Écrire le développement limité de $f(x)$ l'ordre 2, au voisinage de 0 En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\, du$$

5. Démontrer, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

7. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u}\, du - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\, dx$$

8. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

ECRICOME 2020 - fonction d'une variable, intégrale fonction de ses bornes, suite implicite, fonction de deux variables

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$.

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.

Démonstration.
Pour la suite de l'exercice, on introduit la fonction $h_n : t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$.

- La fonction h_n est continue sur $[0, +\infty[$ car elle est le quotient $h_n = \dfrac{g_1}{g_2}$ où :
  - × $g_1 : t \mapsto t^{2n} - 1$ est continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
  - × $g_2 : t \mapsto t + 1$:
    - est continue sur $[0, +\infty[$ car polynomiale.
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $[0, +\infty[$.

  La fonction h_n admet donc une primitive H_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
- Soit $x \in [0, +\infty[$. Par définition :

$$f_n(x) \ = \ \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \ = \ \Big[\ H_n(t)\ \Big]_0^x \ = \ H_n(x) - H_n(0)$$

  Ainsi, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ comme somme de la fonction H_n (elle-même $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$) et d'une constante.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

- De plus, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f_n'(x) = H_n'(x) = h_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.}$$

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction f_n est la primitive de h_n sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule au point 0. Ainsi, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = h_n(x)$.
- L'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers. Imaginons par exemple une fonction g_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = \int_0^{x^2} h_n(t)\, dt = \Big[\ H_n(t)\ \Big]_0^{x^2} = H_n(x^2) - H_n(0)$$

  La fonction g_n `N'EST PAS` une primitive de h_n.
  L'expression ci-dessus permet toutefois de conclure que g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de $x \mapsto x^2$ par H_n toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles adéquats. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n'(x) = 2x \times H_n'(x^2) = 2x \times h_n(x^2) = 2x\ \frac{x^{2n-1}}{x+1}$$

- Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

2. Étudier les variations de f_n.

Démonstration.

- Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

Comme $x+1>0$, le signe de $f_n'(x)$ est celui de la quantité $x^{2n}-1$.

$$\begin{array}{rcll} f_n'(x) > 0 & \Leftrightarrow & x^{2n} > 1 & \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(x^{2n}\right) > \ln(1) & \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[) \\ & \Leftrightarrow & 2n \ln(x) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(x) > 0 & \textit{(car } 2n > 0) \\ & \Leftrightarrow & x > 1 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[) \end{array}$$

En remarquant de plus $f_n'(0) = -1$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_n	0	$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	

□

3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- Avec des arguments similaires à ceux de la question ***1.***, on démontre que la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Comme } f_n' = h_n, \text{ la fonction } f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $x \geqslant 0$.

$$f_n''(x) = \frac{(2n\,x^{2n-1}) \times (x+1) - (x^{2n}-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)\,x^{2n} + 2n\,x^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}$$

Comme $x \geqslant 0$, alors $(x+1)^2 > 0$. Ainsi, $f_n''(x)$ est du signe de la quantité $(2n-1)\,x^{2n} + 2n\,x^{2n-1} + 1$.
Or :

× comme $n \geqslant 1$, on a : $2n-1 \geqslant 1 > 0$ et $2n \geqslant 0$.

× comme $x \geqslant 0$, on a : $x^{2n} \geqslant 0$ et $x^{2n-1} \geqslant 0$.

Ainsi : $(2n-1)\,x^{2n} + 2n\,x^{2n-1} + 1 \geqslant 0$ comme somme de quantités positives.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \geqslant 0,\ f_n''(x) \geqslant 0. \text{ Cela démontre que la fonction } f_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

4. a) Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n} - 1 \ \geqslant\ n\,(t^2 - 1)$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 1$.

- Rappelons tout d'abord que si $t \neq 1$, on a :

$$\frac{t^{2n} - 1}{t^2 - 1} \ = \ \frac{\left(t^2\right)^n - 1}{t^2 - 1} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \left(t^2\right)^k \qquad \text{\textit{(formule d'une somme géométrique)}}$$

  On peut réécrire cette formule sous la forme suivante, valable pour tout $t \geqslant 1$:

$$t^{2n} - 1 \ = \ (t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}$$

- Or, pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ t^{2k} \ \geqslant \ 1^{2k} = 1 \qquad \text{\textit{(par croissance de l'application élévation à la puissance $2k$ sur $[0, +\infty[$)}}$$

  Finalement par sommation de ces n égalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \ \geqslant \ \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

  Et enfin, par multiplication par $t^2 - 1 \geqslant 0$, on obtient :

$$\underbrace{(t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k}}_{= \, t^{2n} - 1} \ \geqslant \ n\,(t^2 - 1)$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 1,\ t^{2n} - 1 \ \geqslant \ n\,(t^2 - 1)}$$

□

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant \ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 1$.

- Alors, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\begin{array}{llcll} & t^{2n} - 1 & \geqslant & n\,(t^2 - 1) & \text{\textit{(d'après la question précédente)}} \\[2mm] \text{donc} & \dfrac{t^{2n} - 1}{t + 1} & \geqslant & n\, \dfrac{t^2 - 1}{t + 1} & \text{\textit{(car $t + 1 > 0$)}} \\[2mm] \text{d'où} & \dfrac{t^{2n} - 1}{t + 1} & \geqslant & n\, \dfrac{(t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}} & \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \leqslant x$) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_1^x n\,(t-1)\, dt \\ & & \parallel \\ & & n\left[\dfrac{1}{2}(t-1)^2\right]_1^x \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \ \geqslant\ \frac{n}{2}\,(x-1)^2.}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} f_n(x) & = & \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\ & = & f_n(1) + \displaystyle\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt & \\ & \geqslant & f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x-1)^2.}$$

□

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $x \geqslant 1$:

$$f_n(x) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x-1)^2$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

□

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$f_n(0) = \int_0^0 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = 0$$

$$\boxed{f_n(0) = 0}$$

- En question ***2.***, on a démontré que f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

$$\boxed{\text{Comme } 1 > 0, \text{ on en déduit } f_n(1) < f_n(0) = 0.}$$

□

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $f_n(0) = 0$.

  $\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet pour solution } x = 0.}$

- Si $x \in \,]0, 1]$, alors, par stricte décroissance de f_n sur cet intervalle, on a : $f_n(x) < f_n(0) = 0$.

  $\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f_n(x) = 0 \text{ n'admet pas de solution sur l'intervalle }]0, 1].}$

- Il reste à traiter le cas de l'intervalle $]1, +\infty[$.
  La fonction f_n est :
  × continue sur $]1, +\infty[$,
  × strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
  Ainsi f_n réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f_n(]1, +\infty[)$. Or :

$$f_n(]1, +\infty[) \ = \ \left] \lim_{x \to 1} f_n(x), \ \lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right[= \,]f_n(1), +\infty[$$

  Comme $f_n(1) < 0$, on a : $0 \in \,]f_n(1), +\infty[$.

  $\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]1, +\infty[, \text{ notée } x_n.}$

$\boxed{\text{Finalement, l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet exactement 2 solutions sur } [0, +\infty[\ : x = 0 \text{ et } x = x_n > 1, \text{ seule solution strictement positive.}}$

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2(n+1)} - 1}{t+1}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^{2n+2} - \cancel{1}}{t+1} - \frac{t^{2n} - \cancel{1}}{t+1} \right) dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}\ (t^2 - 1)}{t+1}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}\ (t-1)\cancel{(t+1)}}{\cancel{t+1}}\, dt \\
&= \int_0^x t^{2n+1}\, dt - \int_0^x t^{2n}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
&= \left[\frac{1}{2n+2}\, t^{2n+2} \right]_0^x - \left[\frac{1}{2n+1}\, t^{2n+1} \right]_0^x \\
&= \frac{1}{2n+2}\ \left[t^{2n+2} \right]_0^x - \frac{1}{2n+1}\ \left[t^{2n+1} \right]_0^x \\
&= \frac{1}{2n+2}\, x^{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1} \\
&= x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right)}$$

□

8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
Comme $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1} > 0$ alors $x^{2n+1} > 0$.
Ainsi, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de $\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1}$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2n+2} \geqslant \frac{1}{2n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1} \qquad \textit{(car } 2n+2 > 0\textit{)} \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}, \ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé : $x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
On peut donc utiliser la propriété précédente pour $x = x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} f_{n+1}(x_n) & \geqslant & f_n(x_n) \\ & & \shortparallel \\ & & 0 \qquad \textit{(par définition de } x_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0.}$$

□

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de x_{n+1}, on a : $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$$

- De plus, on sait :
  × $x_n > 1$ et $x_{n+1} > 1$ d'après la question ***6***.
  × la fonction f_{n+1} réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]f_n(1), +\infty[$.
  La réciproque de cette bijection, définie de $]f_n(1), +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ est strictement croissante car de même monotonie que f_{n+1} sur $]1, +\infty[$. En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité :

$$x_n \geqslant x_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \geqslant x_{n+1}. \text{ La suite } (x_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

- La suite (x_n) est :
  $\times$ décroissante,
  $\times$ minorée par 1 (par définition, pour tout $n \geqslant 1$: $x_n > 1$).
  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite (x_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (x_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$

  On comprend alors que l'étude de (x_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f_n.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ f_m(x_m) = 0}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (x_n).
  On l'utilise en ***8.b)*** pour $m = n$ et en ***8.c)*** pour $m = n + 1$.
- Comme la suite (x_n) est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de (x_n) à l'aide de la différence $x_{n+1} - x_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f_{n+1}(x_n) \ \geqslant\ f_{n+1}(x_{n+1})$$

  et de conclure : $x_n \ \geqslant\ x_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f_{n+1}. □

9. a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- D'après la question ***5.***, on a : $f_n(1) < 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } f_n(1) \leqslant 0.}$$

- Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{array}{lcccccl}
\text{Alors} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & 1 & \\
\text{donc} & 0^{2n} & \leqslant & t^{2n} & \leqslant & 1^{2n} & \textit{(par croissance de la fonction élévation à la puissance } 2n\textit{)} \\
\text{ainsi} & -1 & \leqslant & t^{2n} - 1 & \leqslant & 0 & \\
\text{d'où} & -\dfrac{1}{t+1} & \leqslant & \dfrac{t^{2n}-1}{t+1} & \leqslant & 0 & \textit{(car } t+1>0\textit{)}
\end{array}$$

  Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt \ \geqslant\ \int_0^1 \frac{-1}{t+1}\,dt = \Big[-\ln\big(|t+1|\big)\Big]_0^1 = -\big(\ln(2) - \cancel{\ln(1)}\big)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \geqslant 1,\ -\ln(2) \leqslant f_n(1).}$$

□

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, par définition (question ***6.***), on a : $x_n > 1$.

$$\boxed{\text{On a bien : } x_n - 1 \geqslant 0.}$$

- En apppliquant le résultat de la ***4.b)*** en $x = x_n \geqslant 1$, on obtient :

$$f_n(x_n) \ \geqslant\ f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x_n-1)^2 \ \geqslant\ -\ln(2) + \frac{n}{2}\,(x_n-1)^2 \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

  Or, par définition de x_n, on a : $f_n(x_n) = 0$. On en déduit, en réordonnant :

$$\begin{array}{lrcll} & \dfrac{n}{2}\,(x_n-1)^2 & \leqslant & \ln(2) & \\[2ex] \text{donc} & (x_n-1)^2 & \leqslant & \dfrac{2}{n}\ \ln(2) & \textit{(car } \tfrac{2}{n} > 0\textit{)} \\[2ex] \text{ainsi} & \sqrt{(x_n-1)^2} & \leqslant & \sqrt{\dfrac{2}{n}\ \ln(2)} & \textit{(par croissance de la fonction racine sur } [0,+\infty[\textit{)} \\[2ex] \text{d'où} & |x_n-1| & \leqslant & \sqrt{\dfrac{2\ \ln(2)}{n}} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, comme } x_n - 1 \geqslant 0, \text{ on obtient bien : } x_n - 1 \ \leqslant\ \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}.}$$

- On vient de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

  Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2\ \ln(2)}{n}} = 0$.

  Par théorème d'encadrement, on en conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - 1 = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut finalement : } \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.}$$

Commentaire

- Encore une fois, c'est la propriété de définition des termes de la suite (x_n) qui est utilisée ici. C'est logique puisqu'on ne connaît pas d'expression explicite des termes de (x_n).
- La présence de la quantification « $\forall n \in \mathbb{N}^*$ » peut faire penser à utiliser une récurrence. Ce type de raisonnement nécessite l'existence d'une propriété liant les termes de rangs successifs afin pouvoir mettre en œuvre l'étape d'hérédité. C'est pourquoi la récurrence est l'outil de base de démonstration des propriétés des suites récurrentes d'ordre 1 (le terme au rang $n+1$ s'exprime directement en fonction du terme au rang n). L'utilisation est plus rare dans le cas des suites implicites.

□

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Démonstration.

- La fonction $h_n : (x, y) \to f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $h_n = f_n \circ g$ où :
  - × $g : (x, y) \to x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $g(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ***3***.

  De même, la fonction $(x, y) \to f_n(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

  $\boxed{\text{On en déduit que } G_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \text{ en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.}$

- Comme G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, elle admet en particulier des dérivées premières et secondes sur cet ensemble.

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, & \partial_1(G_n)(x, y) & = & f_n(y)\ f_n'(x) \\ & \partial_2(G_n)(x, y) & = & f_n(x)\ f_n'(y) \end{array}}$$

□

11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{cl} (x, y) \text{ est un point critique de } G_n & \Leftrightarrow \quad \nabla(G_n)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(G_n)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(G_n)(x, y) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f_n(y)\, f_n'(x) & = & 0 \\ f_n(x)\ f_n'(y) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f_n(y) & = & 0 \\ f_n(x) & = & 0 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{rcl} f_n(y) & = & 0 \\ f_n'(y) & = & 0 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{rcl} f_n'(x) & = & 0 \\ f_n(x) & = & 0 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{rcl} f_n'(x) & = & 0 \\ f_n'(y) & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Or :

× d'après la question ***6.*** : $f_n(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = x_n$

× d'après la question ***2.*** : $f_n'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = 1$.

On obtient donc :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } G_n \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x_n \\ x & = & x_n \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x_n \\ y & = & 1 \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ x & = & x_n \end{array} \right. \text{ OU } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

Enfin, d'après la question ***6.*** : $x_n > 1$. Ainsi :

$$\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } G_n\end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& x_n \\ x &=& x_n \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } G_n \text{ admet exactement 2 points critiques : } (x_n, x_n) \text{ et } (1,1).}$$

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(G_n)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on obtient deux équations du type :

  $$\Psi(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(y) = 0$$

  Ces deux équations ne dépendent que d'une seule variable, on peut donc utiliser toutes les techniques usuelles de résolution d'équation.

$\square$

12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1,1)$.

Démonstration.

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} \partial_{1,1}^2(G_n)(x,y) &=& f_n(y)\, f_n''(x) \\ \partial_{1,2}^2(G_n)(x,y) &=& f_n'(x)\, f_n'(y) \\ \partial_{2,1}^2(G_n)(x,y) &=& f_n'(x)\, f_n'(y) \\ \partial_{2,2}^2(G_n)(x,y) &=& f_n(x)\, f_n''(y) \end{array}$$

Commentaire

× Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

× Ici, le calcul de $\partial_{1,2}^2(G_n)(x,y)$ et $\partial_{2,1}^2(G_n)(x,y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

- On note : $H_n = \nabla^2(G_n)(x_n, x_n)$.
  Par définition de x_n : $f_n(x_n) = 0$. D'où :

$$H_n = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(G_n)(x_n,x_n) & \partial_{1,2}^2(G_n)(x_n,x_n) \\ \partial_{2,1}^2(G_n)(x_n,x_n) & \partial_{2,2}^2(G_n)(x_n,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n)\, f_n''(x_n) & f_n'(x_n)\, f_n'(x_n) \\ f_n'(x_n)\, f_n'(x_n) & f_n(x_n)\, f_n''(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \big(f_n'(x_n)\big)^2 \\ \big(f_n'(x_n)\big)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H_n = \begin{pmatrix} 0 & \big(f_n'(x_n)\big)^2 \\ \big(f_n'(x_n)\big)^2 & 0 \end{pmatrix}}$$

- On note : $M_1 = \nabla^2(G_n)(1,1)$.
  Par définition de x_n : $f_n(x_n) = 0$. D'où :

$$M_1 \; = \; \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(G_n)(1,1) & \partial^2_{1,2}(G_n)(1,1) \\ \partial^2_{2,1}(G_n)(1,1) & \partial^2_{2,2}(G_n)(1,1) \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} f_n(1)\, f''_n(1) & f'_n(1)\, f'_n(1) \\ f'_n(1)\, f'_n(1) & f_n(1)\, f''_n(1) \end{pmatrix}$$

  Or :

  × d'après la question ***1.*** : $f'_n(1) = 0$.

  × d'après la question ***3.*** : $f''_n(1) = \dfrac{(2n - \cancel{1}) + 2n + \cancel{1}}{2^2} = n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_1 = \begin{pmatrix} n\, f_n(1) & 0 \\ 0 & n\, f_n(1) \end{pmatrix}}$$

□

13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(H_n - \lambda\, I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & \left(f'_n(x_n)\right)^2 \\ \left(f'_n(x_n)\right)^2 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & \lambda^2 - \left(f'_n(x_n)\right)^2 \\ & = & \left(\lambda - f'_n(x_n)\right) \left(\lambda + f'_n(x_n)\right) \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } H_n & \Leftrightarrow & H_n - \lambda\; I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H_n - \lambda\; I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left(\lambda - f'_n(x_n)\right) \left(\lambda + f'_n(x_n)\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = f'_n(x_n) \text{ OU } \lambda = -f'_n(x_n) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(H_n) = \{f'_n(x_n), -f'_n(x_n)\}.}$$

- D'après la question ***6.*** : $x_n > 1$. Ainsi, d'après la question ***2.*** : $f'_n(x_n) > 0$.
  On en déduit que les 2 valeurs propres de H_n sont **non nulles** et de signes opposés.

$$\boxed{\text{On en déduit que } G_n \text{ n'admet pas d'extremum local en } (x_n, x_n)\text{. C'est un point selle.}}$$

□

14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Démonstration.

- La matrice $M_1 = \begin{pmatrix} n\, f_n(1) & 0 \\ 0 & n\, f_n(1) \end{pmatrix}$ est diagonale. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(M_1) = \{n\, f_n(1)\}.}$$

- Or, d'après la question ***5.*** : $f_n(1) < 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } G_n \text{ admet un maximum local en } (1,1).}$$

□

EDHEC 2021 - fonction de deux variables, fonction d'une variable, suite implicite

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) \ = \ x^3 + y^3 - 3xy$.

Partie 1

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car elle est polynomiale.}}$$ □

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction f admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tout d'abord : $\partial_1(f)(x,y) \ = \ 3\,x^2 - 3\,y$.
- Ensuite : $\partial_2(f)(x,y) \ = \ 3\,y^2 - 3\,x$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial_1(f) : (x,y) \mapsto 3\,x^2 - 3\,y \\ \partial_2(f) : (x,y) \mapsto 3\,y^2 - 3\,x \end{array}}$$ □

b) Déterminer les points critiques de f.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
(x,y) \text{ est un point critique de } f & \Leftrightarrow & \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x^2 - 3\,y & = & 0 \\ 3\,y^2 - 3\,x & = & 0 \end{array} \right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 0 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. & \textit{(en divisant chaque ligne par } 3 > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y^4 - y & = & 0 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. & \textit{(en remplaçant } x \textit{ par } y^2 \textit{ dans la } 1^{\text{ère}} \textit{ ligne)} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y\,(y^3 - 1) & = & 0 \\ x & = & y^2 \end{array} \right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \quad \texttt{OU} \quad y^3 = 1 \\ x \ = \ y^2 \end{array} \right. &
\end{array}$$

Ainsi : (x,y) est un point critique de f $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} y=0 \quad \texttt{OU} \quad y=1 \\ x \ = \ y^2 \end{array}\right.$ *(car $1^3=1$ et que la fonction $u \mapsto u^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0),\ (1,1)\}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc deux points critiques : } (0,0) \text{ et } (1,1).}$$

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :

$$x = \psi(y)$$

  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
  C'est la stratégie qu'on a adoptée ci-dessus.

□

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Démonstration.

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Elle admet donc des dérivées partielles à l'ordre 2 sur cet ensemble.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tout d'abord :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6\,x$$

- Ensuite :

$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -3$$

- Or, comme F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'`OUVERT` $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) \ = \ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) \ = \ -3$$

- Enfin : $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6\,y$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & -3 \\ -3 & 6\,y \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{2,1}(f)(x,y)$ et $\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } H \quad & \Leftrightarrow \quad H - \lambda\, I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad \det(H - \lambda\, I) = 0 \end{aligned}$$

- Dans la suite, notons :

$$H_0 = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_1 = \nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Vérifions tout d'abord si f admet unextremum en $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \det\Big(H_0 - \lambda\, I\Big) &= \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (-\lambda)^2 - (-3)^2 \\ &= \big(-\lambda - (-3)\big)\,\big(-\lambda + (-3)\big) \\ &= (3-\lambda)\,(-3-\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } H_0 \text{ admet pour valeurs propres } 3 \text{ et } -3.}$$

> La matrice $\nabla^2(f)(0,0)$ admet deux valeurs propres distinctes non nulles et de singes opposés. On en déduit que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ (qui est un point selle).

- Vérifions maintenant si f admet unextremum en $(1,1)$:

$$\begin{aligned} \det\Big(H_1 - \lambda\, I\Big) &= \det\left(\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (6-\lambda)^2 - (-3)^2 \\ &= \big((6-\lambda) - (-3)\big)\,\big((6-\lambda) + (-3)\big) \\ &= (9-\lambda)\,(3-\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } H_1 \text{ admet pour valeurs propres } 3 \text{ et } 9.}$$

> La matrice $\nabla^2(f)(1,1)$ admet deux valeurs propres distinctes qui sont toutes les deux strictement positives. On en déduit qu'au point $(1,1)$, f admet un minimum local qui a pour valeur :
> $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 = -1.$

□

4. Cet extremum est-il global ?

Démonstration.

- Remarquons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } -1 \text{ n'est pas un minimum global de la fonction } f.}$$

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative.
  À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  × « La suite (un) est-elle majorée ? »
  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).
- Il s'agit donc ici de démontrer que f n'admet pas de minimum local au point $(1,1)$. Autrement dit, il faut démontrer que f prend des valeurs strictement plus faibles que -1, valeur atteinte en $(1,1)$.
  Pour ce faire, il est classique :
  × de fixer une variable (y par exemple) en lui donnant une valeur arbitraire (on choisit souvent $y_0 = 0$ ou $y_0 = 1$ pour simplifier la suite),
  × de déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$.
  Si l'une de ces limites est $-\infty$, cela signifie que f prend forcément des valeurs plus faibles que -1.
- Il était aussi possible d'exhiber un point (x_0, y_0) tel que :

$$f(x_0, y_0) \ < \ f(1,1)$$

  On pouvait par exemple remarquer : $f(-2,0) = (-2)^3 = -8 < -1$.

□

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \ = \ f(x,1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.

Démonstration.
Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On considère ici la fonction $g : x \mapsto f(x,1) = x^3 - 3x + 1$.

- La fonction g est une fonction polynomiale (de degré 2).
  Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \ = \ 3\,x^2 - 3 = 3\ (x^2 - 1) = 3\ (x-1)\,(x+1)$$

Par l'étude du signe d'un trinôme, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

$\times$ $x^3 - 3x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$\times$ $x^3 - 3x + 1 \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$,

$\times$ $g(-1) = (-1)^3 - 3\,(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$,

$\times$ $g(-1) = (1)^3 - 3 + 1 = -1$.

On remarque en particulier : $\forall x \leqslant 1,\ g(x) \leqslant 3$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } n \geqslant 4, \text{ l'équation } g(x) = n \text{ ne peut avoir de solution que sur l'intervalle } [1, +\infty[.}$

- La fonction g est :

$\times$ continue sur $[1, +\infty[$,

$\times$ strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g\big([1, +\infty[\big)$. Or :

$$g\big([1, +\infty[\big) \ = \ [-1, +\infty[$$

Comme $n \in [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in [1, +\infty[$.

$\boxed{\text{L'équation } g(x) = n \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R} \text{ notée } u_n.}$

$\square$

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1}.

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction $h^{-1} : [-1, +\infty[\to [1, +\infty[$ admet sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ les mêmes variations que la fonction h sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1		$+\infty$
Variations de h^{-1}	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

- Par définition : $h(u_n) = n$. On en déduit, en appliquant h^{-1} de part et d'autre :

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}\big(h(u_n)\big) & = & h^{-1}(n) \\ \shortparallel & & \\ u_n & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x) + \infty.}$$

□

c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Démonstration.

- Par définition : $h(u_n) = n$. Autrement dit :

$$u_n^3 - 3\,u_n + 1 = n$$

- Comme $u_n \in [1, +\infty[$, $u_n \neq 0$ et on obtient, en divisant par $u_n^3 \neq 0$:

$$\frac{n}{u_n^3} = 1 - \frac{3}{u_n^2} + \frac{1}{u_n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^3 = +\infty$ *d'après la question précédente)*

- On en conclut : $u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

$$\boxed{\text{Ou encore : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}.}$$

Commentaire

- La **Partie 2** consiste en l'étude de la suite (u_n). On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \geqslant 4$, u_n est l'unique solution de l'équation $g(x) = n$ sur $\mathbb{R}$

  On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction g ou plutôt de $h = g_{|[1,+\infty[}$ puisque l'équation $g(x) = n$ n'a de solution que sur $[1, +\infty[$.

- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \geqslant 4,\ h(u_m) = m}$.
  Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n). On l'utilise en ***6.b)*** pour en déduire la limite de (u_n) et en ***6.c)*** pour trouver un équivalent de cette suite.

□

EDHEC 2020 - suites d'intégrales, série, suite extraite, relations de récurrence

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n \ = \ \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \, dx \quad \text{et} \quad J_n \ = \ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ de :
  - × $f_1 : x \mapsto x^n$ continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
  - × $f_2 : x \mapsto (1+x)^2$
    - continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale,
    - qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[0,1]$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } I_n \text{ est bien définie.}}$$

- De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } J_n \text{ est bien définie.}}$$

□

2. Calculer I_0 et I_1.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$I_0 \ = \ \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2} \, dx \ = \ \int_0^1 (1+x)^{-2} \, dx \ = \ \left[\frac{1}{-2+1} \, (1+x)^{-2+1} \right]_0^1 \ = \ -\left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0} \right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Ensuite :

$$I_1 \ = \ \int_0^1 \frac{x^1}{(1+x)^2} \, dx$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} u(x) & = & x & u'(x) & = & 1 \\[2mm] v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[x \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{1+1} + 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= -\frac{1}{2} + \left[\ln\left(|1+x|\right) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(2) - \cancel{\ln(1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

□

3. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2\,x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n \left(x^2 + 2\,x + 1\right)}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n \cancel{(1+x)^2}}{\cancel{(1+x)^2}} dx \\ &= \int_0^1 x^n \, dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}}$$

□

b) En déduire I_2.

Démonstration.
D'après la question précédente : $I_2 + 2\,I_1 + I_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$. On en déduit :

$$\begin{aligned} I_2 &= 1 - 2\,I_1 - I_0 \\ &= 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \qquad \textit{(d'après \textbf{2.})} \\ &= \frac{3}{2} - 2\,\ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2} - 2\,\ln(2)}$$

□

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
2 a = 1/2
3 b = np.log(2) - 1/2
4 for k in range(2,n+1):
5     aux = a
6     a = ------
7     b = ------
8 print(b)
```

Démonstration.
Détaillons les différents éléments présents dans ce script.

- **Début du programme**
  × En ligne 1, on stocke dans la variable `n`, une valeur pour n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur :

```
1 n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
```

  × En ligne 2 et 3, on définit les variables `a` et `b`.
  Initialement, ces deux variables sont affectées aux valeurs de I_0 et I_1.

```
2 a = 1/2
3 b = np.log(2) - 1/2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 7 consistent à mettre à jour les variables `a` et `b` de sorte à ce qu'elles contiennent les valeurs successives de la suite (I_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
4 for k in range(2,n+1):
5     aux = a
6     a = b
7     b = 1/((k-2)+1) - 2 * a - aux
```

Pour ce faire, on a introduit une variable auxiliaire `aux`. Détaillons le principe de cette boucle :

× avant le 1^er^ tour de boucle :

`a` contient I_0 et `b` contient I_1

lors du 1^er^ tour de boucle (`k` contient 2) :

`aux = a` — (`aux` contient alors I_0, dernière valeur en date de `a`)

`a = b` — (`a` contient alors I_1, dernière valeur en date de `b`)

`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a - aux` — (`b` contient alors $\dfrac{1}{0+1} - 2\ I_1 - I_0 = I_2$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× avant le $2^{\text{ème}}$ tour de boucle, d'après ce qui précède :

`a` contient I_1 et `b` contient I_2

lors du $2^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient 3) :

`aux = a` — (`aux` contient alors I_1, dernière valeur en date de `a`)

`a = b` — (`a` contient alors I_2, dernière valeur en date de `b`)

`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a - aux` — (`b` contient alors $\dfrac{1}{1+1} - 2\ I_2 - I_1 = I_3$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

× ...

× avant le $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle :

`a` contient I_{n-2} et `b` contient I_{n-1}

lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour de boucle (`k` contient n) :

`aux = a` — (`aux` contient alors I_{n-2}, dernière valeur en date de `a`)

`a = b` — (`a` contient alors I_{n-1}, dernière valeur en date de `b`)

`b = 1/((k-2) + 1) - 2 * a - aux` — (`b` contient alors $\dfrac{1}{n+1} - 2\ I_{n-1} - I_{n-2} = I_n$, valeur obtenue avec la relation de ***3.a)*** et les valeurs actuelles de `a` et `aux`)

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `b` contient la quantité I_n. Il n'y a plus qu'à renvoyer la valeur contenue dans `b`.

```
9  print(b)
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet certainement d'obtenir tous les points alloués.
- On a démontré dans cette question que si, avant le $k^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  `aux` contient I_{k-2}, `a` contient I_{k-1} et `b` contient I_k

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  `aux` contient I_{k-1}, `a` contient I_k et `b` contient I_{k+1}

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `b` contient I_n.

Commentaire

- Il est à noter que si on teste la fonction avec une valeur de `n` strictement inférieure à 2, alors on n'entre pas dans la boucle (l'instruction `range(2,n+1)` crée une matrice ligne vide). Dans ce cas, la variable `b` n'est pas mise à jour et contient à la fin du programme I_1, soit la valeur initialement affectée à `b`. Ainsi, la fonction renvoie la bonne valeur aussi lorsque la variable `n` prend la valeur 1 (mais pas quand `n` prend la valeur 0).
- Pour le calcul informatique du $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite (z_n) récurrente d'ordre 1 (dont chaque terme dépend uniquement du précédent), il suffit d'introduire une variable `u` et de mettre à jour son contenu à l'aide d'une boucle. La suite (I_n) de l'énoncé est récurrente d'ordre 2 (chaque terme dépend des deux précédents). Obtenir son $n^{\text{ème}}$ terme nécessite non pas deux mais bien trois variables distinctes (la mise à jour de `a` écrase la valeur précédente de `a` qui est pourtant nécessaire pour définir la nouvelle valeur de `b`. On fait donc appel à une variable auxiliaire `aux` qui permet de stocker en mémoire de l'information.

$\square$

4. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lccccc l}
 & 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 & \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & 1+x & \leqslant & 2 & \\
\text{d'où} & 1 & \leqslant & (1+x)^2 & \leqslant & 4 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[) \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & \dfrac{1}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{1}{4} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[) \\
\text{alors} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & \dfrac{x^n}{4} & \textit{(car } x^n \geqslant 0) \\
\text{enfin} & x^n & \geqslant & \dfrac{x^n}{(1+x)^2} & \geqslant & 0 & \textit{(car } \dfrac{x^n}{4} \geqslant 0)
\end{array}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx & \geqslant & I_n & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 0\,dx \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\dfrac{1}{n+1} & & & & 0 \quad \textit{(d'après le calcul de } \textbf{\textit{3.a)}})
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\, dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\, dt \ \leqslant\ \int_a^b M\, dt = M(b-a)$$
- L'idée à retenir est que pour encadrer une intégrale, on commence systématiquement par encadrer l'intégrande.

□

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \ \leqslant\ I_n \ \leqslant\ \frac{1}{n+1}$$
Or :
× d'une part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
× d'autre part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$ □

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\, J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On procède par intégration par parties (IPP).
$$\left|\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x^n & u'(x) & = & n\, x^{n-1} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}\right.$$
Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \left[\, x^n \times \left(-\frac{1}{1+x}\right) \,\right]_0^1 - \int_0^1 n\,x^{n-1} \times \left(-\frac{1}{1+x}\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{1+1} + 0 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} + n\,J_{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \frac{1}{2}}$$

□

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\,\ln\left(|1+x|\right)\,\right]_0^1 = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{J_0 = \ln(2)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n\,\frac{\cancel{1+x}}{\cancel{1+x}}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Avec le même calcul qu'en } \textbf{\textit{3.a)}}, \text{ on obtient : } \forall n \in \mathbb{N},\ J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}.}$$

□

b) En déduire la valeur de J_1.

Démonstration.

D'après la question précédente : $J_0 + J_1 = \dfrac{1}{0+1} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2).}$$

□

7. En utilisant les questions ***5.*** et ***6.***, compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
2 J = np.log(2)
3 for k in range(1,n):
4     J = ------
5 print(--------)
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  × En ligne 1, on stocke dans la variable `n`, une valeur de n à l'aide d'une interface de dialogue avec l'utilisateur.

```
1 n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
```

  × En ligne 2, on définit la variable `J`.
  Cette variable est initialisée à J_0.

```
2 J = np.log(2)
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à mettre à jour la variable `J` de sorte à ce qu'elle contienne les valeurs successives de la suite (J_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3 for k in range(1,n):
4     J = 1/k - J
```

  On a ici utilisé la relation obtenue en question ***6.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - J_n$. Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \frac{1}{n} - J_{n-1}$$

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `J` contient la valeur J_{n-1} (puisque la variable `k` varie de 1 à `n` $- 1$). On obtient alors la valeur de I_n en utilisant la relation démontrée en question ***5***. On finit en renvoyant la valeur de I_n.

```
7 print(n*J - 1/2)
```

□

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)\ :\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

- **Initialisation**
  - × d'une part, d'après ***6.b)*** : $J_1 = 1 - \ln(2)$.
  - × d'autre part :

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ -\big(\ln(2) - \frac{(-1)^{1-1}}{1}\big) \ = \ -\big(\ln(2) - 1\big) \ = \ 1 - \ln(2)$$

  D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$)
  - × D'une part, d'après la question ***6.a)*** :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \\ &= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \end{aligned}$$

  - × D'autre part :

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{n+1} \right) \\ = \ & (-1)^{n+1}\ \ln(2) - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + (-1)^{1+(n+1)+n}\ \frac{1}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + (-1)^{2n+2}\ \frac{1}{n+1} \\ = \ & (-1)^{n=1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} && \textit{(car } 2n+2 \textit{ est pair)} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).}$$

□

9. a) Utiliser les questions ***4.*** et ***5.*** pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$I_n \;=\; n\,J_{n-1} - \frac{1}{2}$$
On en déduit : $I_n + \dfrac{1}{2} = n\,J_{n-1}$. Et donc :
$$\frac{I_n}{n} + \frac{1}{2\,n} \;=\; J_{n-1}$$
- Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0.}$$

Commentaire

- On pouvait également déduire des questions ***4.*** et ***5.*** un équivalent de (J_n) pour conclure quant à sa limite.
  - × D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$I_n \;=\; n\,J_{n-1} - \frac{1}{2}$$
  Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2} = 0$.
  D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,J_{n-1} = \dfrac{1}{2}$.
  - × Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $n\,J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :
  $$J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n}$$
  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$.
- Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue au regard de la question ***9.c)***. □

b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. Autrement dit :
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \;=\; 0$$

- Par continuité de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| \ = \ 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| \ = \ |(-1)^n| \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \ = \ \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).}$$

□

c) Utiliser la question ***5.*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \ = \ n\, J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} \ = \ (n+1)\, J_n - \frac{1}{2}$$

Or, d'après la question ***4.*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\, J_n - \dfrac{1}{2} = 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n \to +\infty} (n+1)\, J_n = \frac{1}{2}.}$$

- Comme $\dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient : $(n+1)\, J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$J_n \ \underset{n \to +\infty}{\sim} \ \frac{1}{2\,(n+1)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n}.}$$

□

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ***8.*** :

$$J_n \ = \ (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \ = \ (-1)^n\, u_n$$

- Or, d'après la question précédente : $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. On en déduit : $(-1)^n\,u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n}$. D'où :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(-1)^n\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n \times (-1)^n\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{2n}\ 2\,n} = \frac{(-1)^n}{1 \times 2\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n}.}$$

□

b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque :

$$\frac{(-1)^n}{2\,n} = -\frac{1}{2}\ \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ est convergente d'après } \textbf{\textit{9.b)}}, \\ \text{on en déduit que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{2\,n} \text{ est convergente.}\end{array}}$$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas une série à termes de signe constant. On ne peut donc pas lui appliquer (à elle ou son opposée) un critère de convergence des séries à termes positifs. On cherche alors à savoir si $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente.

× Tout d'abord, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\,n}$, alors :

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{2\,n}\right| = \frac{1}{2\,n}$$

× Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2\,n} \geqslant 0$

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2\,n}$ aussi.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|$ n'est pas convergente.

Autrement dit, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

On en conclut que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente ou divergente.

Commentaire

La tournure de la 2^{nde} partie de la question est suffisamment vague pour que l'on doncsidère plusieurs réponses comme acceptables. Il convient cependant d'être précis.

- Dire qu'on ne peut rien conclure car $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas une série à termes positif est `FAUX` !
  D'ailleurs, on parvient à conclure quant à la convergence de cette série dans la question ***11***.
- dire qu'on ne peut pas utiliser directement les critères de convergence des séries à termes positifs est par contre acceptable et permet certainement de récupérer une partie des points de la question.

$\square$

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k \quad & \Leftrightarrow \quad (k+1)\, u_k - (-1)^k = (k+1)\, u_{k+1} \\ & \Leftrightarrow \quad u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} = u_{k+1} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vérifiée. En effet, par définition de u_{k+1} :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \ln(2) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} + \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \\ &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ u_k - \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par équivalence, la première assertion est également vérifiée.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k.}$$

$\square$

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \ = \ (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les égalités de la question précédente pour k variant de 1 à n.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k}_{= S_n} \ = \ \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cll} & \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)\, u_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} k\, u_k & \\ = & \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\, u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} k\, u_k & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & \cancel{\sum\limits_{k=2}^{n} k\, u_k} + (n+1)\, u_{n+1} - \left(1 \times u_1 + \cancel{\sum\limits_{k=2}^{n} k\, u_k}\right) & \textit{(par télescopage)} \\ = & (n+1)\, u_{n+1} - u_1 & \end{array}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k & = & \dfrac{1-(-1)^n}{1-(-1)} & \textit{(car } -1 \neq 1\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right) & \end{array}$$

Ainsi :

$$S_n \ = \ (n+1)\, u_{n+1} - u_1 + \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right).}$$

□

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

Démonstration.

- Étudions la suite (S_{2n}).
  - × Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} S_{2n} & = & (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 - \dfrac{1}{2}\left(1-(-1)^{2n}\right) \\ & = & (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 - \dfrac{1}{2}(1-1) \\ & = & (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 \end{array}$$

  - × De plus :

$$u_1 \ = \ \ln(2) - \sum_{j=1}^{1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \ = \ \ln(2) - 1$$

  - × Par ailleurs, d'après la question ***10.a)*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+1)\, u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{(2n+1)}\, \frac{(-1)^{2n+1}}{2\,\cancel{(2n+1)}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n} \ = \ -\frac{1}{2} - \big(\ln(2) - 1\big) \ = \ \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Étudions ensuite la suite (S_{2n+1}).
  - $\times$ Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{2n+1}\right) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}(1+1) \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) + 1 - 1 \\ &= (2n+2)\, u_{2n+2} - \ln(2) \end{aligned}$$

  - $\times$ Par ailleurs, d'après la question ***10.a)*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$. D'où :

$$(2n+2)\, u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{(2n+2)}\, \frac{(-1)^{2n+2}}{2\,\cancel{(2n+2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

- Soit I un intervalle ouvert contenant $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.
  - $\times$ Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indices pairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
  - $\times$ Comme $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indices impairs de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

  On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
  Ceci signifie que la suite (S_n) est convergente de limite $\ell = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est donc convergente de somme } \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (S_n) vers un réel ℓ admet deux définitions équivalentes.

1) Définition sans les ε :

(S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux

C'est la définition donnée par le programme officiel (et celle qu'on a utilisée pour la démonstration).

2) Définition avec les ε :

$$(S_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |S_n - \ell| < \varepsilon$$

- On peut aussi effectuer la démonstration précédente à l'aide de cette deuxième définition. Détaillons ce point.
Soit $\varepsilon > 0$.
  × $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par définition de la convergence :
  il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$: $|S_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  × $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par définition de la convergence :
  il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$: $|S_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On choisit alors $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

$$\boxed{\text{Alors, pour tout } n \geqslant n_0 : |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon.}$$

□

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$ ***c)*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right)$$

- De plus, d'après la question ***9.b)*** : $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2)$. D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

$\square$

EDHEC 2009 (voie S) - intégrale à paramètre, suite d'intégrales, développement limité, série

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. a. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ est impropre en $+\infty$. De plus,

- Pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^{\alpha n}} \geqslant 0$
- $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha n}}$ est convergente par critère de Riemann au voisinage de $+\infty$ ($\alpha > 1$ et $n \geqslant 1$ donc $\alpha n > 1$).

On en déduit, par critère d'équivalence pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge. Donc u_n est bien défini.

De plus, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} > 0$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on en déduit que

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} > 0$$

□

b. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et en conlure qu'elle converge.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} - \frac{1+t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{-t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \leqslant 0$$

□

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

On a alors :

- la suite (u_n) est décroissante
- la suite (u_n) est minorée par 0

Par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie : $\ell \geqslant 0$.

2. a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \geqslant 0$. On procède par intégration par parties :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = (1+t^\alpha)^{-n} & v'(t) = -n\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-n-1} \end{array} \right.$$

Cette intégration par parties est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, B]$.

$$\begin{aligned} \int_0^B (1+t^\alpha)^{-n}\, dt &= \Big[\ t(1+t^\alpha)^{-n}\ \Big]_0^B - \int_0^B -n\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-n-1} t\, dt \\ &= \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^B \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \\ &= \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^B \frac{t^\alpha + 1 - 1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \\ &= \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} + n\alpha \left(\int_0^B \frac{t^\alpha+1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt - \int_0^B \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \right) \\ &= \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} + n\alpha \left(\int_0^B \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n}}\, dt - \int_0^B \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{B}{(1+B^\alpha)^n} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{B}{B^{n\alpha}} = \frac{1}{B^{n\alpha-1}}$$

et $n\alpha > 1$ (car $n \geqslant 1$ et $\alpha > 1$) donc $\lim\limits_{B\to+\infty} \frac{B}{(1+B^\alpha)^n} = 0$.

Par passage à la limite lorsque $B \to +\infty$ (toutes les intégrales étant convergentes), on obtient :

$$\boxed{u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})}$$

□

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right)$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2, P(n)$

où $P(n)$: $u_n = u_1 \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right)$

Initialisation :

D'après la question précédente, on a $u_1 = \alpha(u_1 - u_2)$ donc $\frac{1}{\alpha}u_1 = u_1 - u_2$ et finalement

$$u_2 = u_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

D'autre part, $u_1 \prod_{k=1}^{2-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) = u_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ d'où $P(2)$.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) \\ &= u_1 \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)\right) \times \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= u_1 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \\ &= u_1 \prod_{k=1}^{n+1-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \end{aligned}$$

d'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$. □

3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Soit $n \geqslant 2$. D'après la question 1.a, $u_n > 0$ donc $\ln(u_n)$ est bien défini. D'après la question 2.b,

$$\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$$

Or,

- pour tout $k \geqslant 1$, $-\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \geqslant 0$ et $\frac{1}{k\alpha} \geqslant 0$
- $-\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k\alpha}$
- la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge par critère de Riemann donc la série $\sum \frac{1}{k\alpha}$ diverge

On en déduit, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, que la série $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$ diverge.
En particulier, la série $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$ étant une série à termes positifs divergente, on a

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

D'où

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

et donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

□

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

Démonstration. Soit $n \geqslant 1$. D'après la question 2.a, on a, pour tout $k \geqslant 1$, $u_k = k\alpha(u_k - u_{k+1})$. En sommant cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\alpha(u_k - u_{k+1}) && \text{(cf question 2.a)} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} ku_k - ku_{k+1} \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)u_k \right) && \text{(on rajoute 0 au début de la somme)} \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} (k-(k-1))u_k - nu_{n+1} \right) \\
&= \alpha \left(S_n - nu_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

d'où $S_n(1-\alpha) = -n\alpha u_{n+1}$ et donc

$$S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$$

□

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\right)$.

Démonstration. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1} && \text{(cf question 4.a)} \\
&= \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_1 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) && \text{(cf question 2.b)} \\
&= \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \\
&= \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \\
&= nu_1 \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(S_n) = \ln(n) + \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) \\
&= \ln(1) - \ln(n) && \text{(par téléscopage)} \\
&= -\ln(n)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\ln(S_n) &= -\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) + \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \\
&= \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

□

c. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Démonstration. On a

$$\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) &= -\frac{1}{k\alpha} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) \\
\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= -\frac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k\alpha} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k}$$

□

d. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

Démonstration. On a

- pour tout $k \geqslant 1$, $\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \geqslant 0$ et $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k} \geqslant 0$
- $\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{k}$

- la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge par critère de Riemann donc la série $\sum \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{k}$ diverge aussi

On en déduit, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, que :
la série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ diverge.
On en déduit que $\ln(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $S_n = e^{\ln(S_n)}$). Ainsi, la série $\sum u_n$ diverge. □

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et on admet qu'alors $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
On rappelle qu'à l'aide de la bibliothèque `numpy` (importée sous l'alias `np`), on accède à la commande `np.pi` qui renvoie une valeur approchée du nombre π.
Ecrire une fonction **Python** qui

- prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.

Démonstration.

```
import numpy as np
def CalculeU(n) :
    u = np.pi / 2
    for k in range(1,n) :
        u = u * (1-1/(2*k))
    return u
```

□