

## Sujets de révisions

### Applications de la réduction des matrices

#### I. Calcul de la puissance $n^e$ d'une matrice

**Exercice 1** (*Calcul d'une puissance via le binôme de Newton*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $A^n$ .

**Exercice 2** (*Calcul d'une puissance via le binôme de Newton*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $b \neq 0$ . Soient  $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer des réels  $x$  et  $y$  tels que  $M = xN + yI_4$ .
2. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la matrice  $M$  :

```

1 def matriceM(a,b):
2     return _____ * np.ones([4,4]) - _____ * np.eye(4)

```

3. Calculer  $N^2$ . Conjecturer une formule pour  $N^k$  et la démontrer par récurrence.
4. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M^n = (a - b)^n I_4 + \frac{(a + 3b)^n - (a - b)^n}{4b} N$$

**Exercice 3** (*Calcul d'une puissance via un polynôme annulateur et une division euclidienne*)

Soit  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $P(X) = X^2 - 2X - 3$  est un polynôme annulateur de  $U$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un polynôme  $Q_n$  et deux réels  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que

$$X^n = (X^2 - 2X - 3)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n$$

3. En déduire l'expression de  $U^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 4** (*Calcul d'une puissance via la diagonalisation*)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de  $A$ .
3. Calculer  $A^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $A$ .
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ .
5. (a) Exhiber  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale et  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

(b) Que représente la matrice  $P$  ? Déterminer  $P^{-1}$ .

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $A^n$ .

**Exercice 5** (*Calcul d'une puissance via la diagonalisation*)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$ .
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de  $A$ .
3. Exhiber  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale et  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

4. Calculer  $P^{-1}$ .
5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déduire des questions précédentes que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3^n & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 1 & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 1 - 3^n & 2 \times 3^n - 1 \end{pmatrix}$$

## II. Etudes de suites récurrentes linéaires

### Exercice 6 (Deux suites couplées)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calculer les valeurs propres de  $A$ .  
(b) Déterminer les sous-espaces propres de  $A$ .
- En déduire qu'il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .
- Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n$  sous forme de tableau matriciel.
- Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par :  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n \end{cases}$$

(a) On note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $A$  et  $X_n$ .

(b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel  $n$ , de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 7 (Une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par ses trois premiers termes  $u_0, u_1, u_2$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$  et on donne :  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Reconnaître pour tout entier naturel  $n$ , le produit  $MX_n$ . En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction des matrices  $M$ ,  $X_0$  et de l'entier naturel  $n$ .
- (a) Déterminer les valeurs propres de  $M$  et leur sous-espace propre associé.  
(b) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
- On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ , c'est-à-dire tel que  $M$  soit la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ .  
(a) On pose  $e'_1 = (1, -2, 4)$ ,  $e'_2 = (1, 1, 1)$  et  $e'_3 = (0, 1, 2)$ .  
Montrer que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et que la matrice  $T$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$  est :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $T^n$ .
- Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Exprimer  $M$  en fonction de  $T$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ , puis  $M^n$  en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel  $n$ .
- (a) Calculer  $P^{-1}$ .  
(b) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer les coefficients de la première ligne de  $M^n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2$  et de l'entier naturel  $n$ .

## ESSEC I 2021 - suite récurrente linéaire d'ordre $d + 1$

### Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que  $(d + 1)$  jours, du jour  $n$  où il est infecté jusqu'au jour  $(n + d)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un  $(d + 1)$ -uplet  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$  qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , on dit que  $\alpha_k$  est la contagiosité de tout individu ayant été infecté  $k$  jours plus tôt.

Autrement dit, on peut considérer que  $\alpha_k$ , lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact  $k$  jours après sa contamination.

Finalement, les réels  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$  sont tels que, pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $\alpha_k \in ]0, 1[$  et on note  $\alpha = \sum_{k=0}^d \alpha_k$ , ce qui signifie que  $\alpha$  est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté. On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec  $J = \mathbb{R}^+$ .

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R_n$  la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour  $n$  par un individu contagieux ce jour-là.  
On suppose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'existence de  $\mathbb{E}(R_n)$  et on pose  $r_n = \mathbb{E}(R_n)$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_n$  la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le  $n$ -ième jour. Par exemple,  $Z_0 = 1$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $I_n$  la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le  $n$ -ième jour, définie par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \quad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  et  $R_n$  sont indépendantes et que si l'on pose  $Y_n = R_n I_n$ , on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de  $Z_{n+1}$  ne dépend que des lois de  $R_n$  et de  $I_n$ .

6. Donner une justification de (\*).

7. a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathbb{E}(I_n)$  existe. Montrer que  $\mathbb{E}(Y_n)$  existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que  $\mathbb{E}(Z_{n+1})$  existe et vaut  $r_n \mathbb{E}(I_n)$ .

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$  existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \quad (3)$$

8. *Programmation de  $z_n$  avec Python.*

On suppose que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n = \frac{n+2}{n+1}$ .

On note  $\Delta$  la matrice ligne  $(\alpha_0 \ \dots \ \alpha_d)$ .

Écrire une fonction **Python** d'entête **def z(Delta, n)** : qui calcule  $z_n$  si **Delta** représente la matrice ligne  $\Delta$ . Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction **len(Delta)** qui donne le nombre d'éléments de **Delta**.

9. Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$ ,  $(V_n)_{n \geq 0}$ , deux suites d'événements tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$ .

• On rappelle que l'on dit qu'un événement  $A$  est presque sûr lorsque  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

10. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$  et  $B$  l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer :  $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

b) En distinguant les cas où  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$  est nulle ou pas, établir, pour tout  $p \geq d$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis :  $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ .

c) En déduire que  $B$  est presque sûr si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$ .

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers 0.

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = \mathbb{E}(e^{-Y_n})$$

b) On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ . En déduire que  $B$  est presque sûr (on pourra montrer que pour tout  $x$  réel,  $e^{-x} \geq 1 - x$ ).

### Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la relation (3) et  $z_0 = 1$ , sous trois hypothèses différentes concernant la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout réel  $x$ , on identifie  $x$  et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est  $x$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , on pose  $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$ .

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\rho \in ]0, 1[$  tels que, pour tout  $n \geq N$ ,  $r_n \alpha \leq \rho$ .

On note  $(H_1)$  cette hypothèse.

a) Que vaut  $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$  ?

En déduire qu'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\theta^{d+1} \geq \rho \left( \sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k} \right)$  (on pourra raisonner par l'absurde).

• On pose  $M = \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} \frac{z_k}{\theta^k}$ .

b) Démontrer, pour tout  $n \geq N$  :  $z_n \leq M \theta^n$ .

c) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ .

On montrerait de même que s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\rho > 1$  tels que, pour tout  $n \geq N$ ,  $r_n \alpha \geq \rho$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ . On note  $(H_2)$  cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions **13.** à **16.**, que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante de valeur  $\frac{1}{\alpha}$ . On note  $(H_3)$  cette hypothèse.  
On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec  $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$ .

- 13. a)** Montrer qu'il existe une matrice  $A$  carrée d'ordre  $d+1$ , de première ligne  $L = (a_0 \ \dots \ a_d)$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = A U_n$ .
- b)** En déduire que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_n = A^n U_0$  puis que  $z_{n+1} = L A^n U_0$ .
- 14.** Dans cette question,  $d = 2$  et  $L = \left(\frac{1}{6} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6}\right)$ .
- a)** Démontrer :  $\text{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$ .
- b)** Déterminer une base  $(V_1, V_2, V_3)$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , où  $V_1$  est un vecteur colonne propre de  $A$  pour la valeur propre 1,  $V_2$  pour  $-\frac{1}{2}$ ,  $V_3$  pour  $-\frac{1}{3}$ , ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.
- c)** Déterminer  $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ , tel que  $U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3$ .
- d)** En déduire que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $s_1$ .

**15.** On revient au cas général.

- a)** Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  si et seulement si  $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k$  et que les sous-espaces propres de  $A$  sont de dimension 1.
- b)** Montrer que 1 est valeur propre de  $A$  et déterminer le vecteur colonne propre associé  $V$  dont la somme des composantes vaut  $d+1$ .
- c)** Établir que  $-1 \notin \text{Sp}(A)$  et que si  $|\lambda| > 1$ , alors  $\lambda \notin \text{Sp}(A)$ .

**16.** On pose pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $b_k = \sum_{i=k}^d a_i$ . On définit aussi le sous-espace vectoriel  $H$  de  $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$

formé des matrices  $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$  telles que  $\sum_{k=0}^d b_k w_k = 0$ .

- a)** Démontrer, pour tout  $W \in H$  :  $A W \in H$ .
- b)** Déterminer l'unique réel  $s$  tel que :  $U_0 - s V \in H$ .
- c)** Nous admettons que, pour tout  $W \in H$ ,  $L A^n W \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  
En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = s$ .

**17.** Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  faites dans cette partie, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  est-elle convergente? Comment interpréter ce résultat?

### III. Etudes de systèmes différentiels linéaires

**Exercice 8** On considère la matrice  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et le système différentiel linéaire

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues  $x, y, z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On note  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  de sorte que

$$X \text{ est solution de } (S) \iff X' = TX$$

On suppose que  $X$  est solution de  $(S)$ .

1. Montrer qu'il existe une constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z(t) = C_3 e^{3t}$ .
2. Montrer qu'il existe une constante  $C_2 \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) = C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{3t}$ .
3. Déterminer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , une expression de  $x(t)$  similaire aux expressions précédentes, faisant intervenir une nouvelle constante  $C_1 \in \mathbb{R}$ .
4. Expliciter trois vecteurs colonnes  $U_1, U_2, U_3$  tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$X(t) = C_1 U_1 e^t + C_2 U_2 e^{2t} + C_3 U_3 e^{3t}$$

5. Que peut-on dire des trois vecteurs  $U_1, U_2, U_3$  vis-à-vis de la matrice  $T$ ? Quel résultat retrouve-t-on?

**Exercice 9** (DS 5 2022-2023) On considère la matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. a) On compile le code **Python** suivant :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3 A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
4 print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```

1 [[ 2 -2  2]
2  [ 1  1  2]
3  [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

- b) En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .

2. a) Déterminer  $\text{Sp}(A)$  et une base de chacun des sous-espaces propres de  $A$ .

- b) Démontrer qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible, dont la première ligne est  $(2 \ 3 \ -2)$ , et une matrice  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient  $A = PDP^{-1}$ . On explicitera les matrices  $P$  et  $D$ .

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues  $x, y, z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

8. Montrer que  $X$  est solution de  $(S)$  si et seulement si, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'(t) = AX(t)$ , où  $A$  est la matrice étudiée dans la partie I.
9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire  $(S)$ .
10. Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  et soient  $X$  et  $Y$  deux solutions de  $(S)$ . On suppose que  $X(t_0) = Y(t_0)$ . Que peut-on en déduire sur  $X$  et  $Y$  ?
11. Montrer que les solutions de  $(S)$  sont de la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{où } U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- a) *i)* Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy  $(\mathcal{P}_1)$ , que l'on notera  $X_1$ .
- ii)* Montrer que la trajectoire associée à la solution  $X_1$  est convergente. Expliciter le point limite  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ . Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire  $(S)$  ?
- b) *i)* Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy  $(\mathcal{P}_2)$ , que l'on notera  $X_2$ .
- ii)* Montrer que la trajectoire associée à la solution  $X_2$  est divergente.
- c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire  $(S)$ . Dire quels sont les tracés associés aux solutions  $X_1$  et  $X_2$  étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

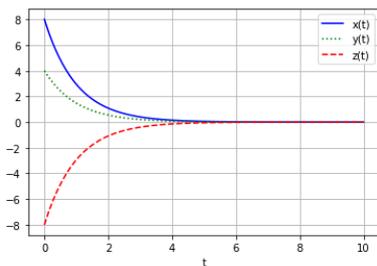


FIG. 1 Tracé 1

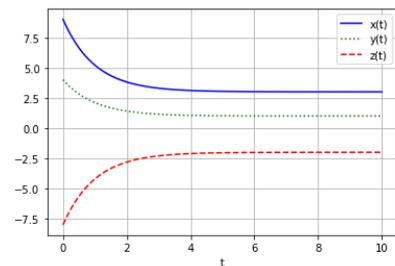


FIG. 2 Tracé 2

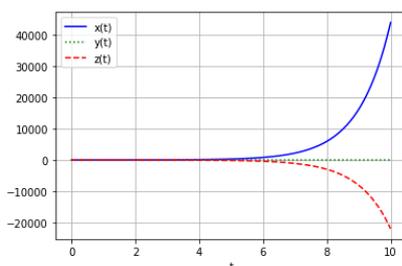


FIG. 3 Tracé 3

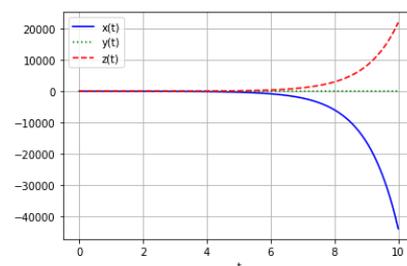


FIG. 4 Tracé 4

**Exercice 10** (DS 6 2022-2023) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $P^{-1}$ . On pose  $T = P^{-1}AP$ . Vérifier que  $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

2. Expliciter  $\text{Sp}(T)$ . En déduire  $\text{Sp}(A)$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_T) : \begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

où les inconnues  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2, y_3$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On note  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ .

3. Montrer que  $X$  est solution de  $(S_A)$  si et seulement si, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'(t) = AX(t)$ .

4. Soit  $Y = P^{-1}X$ . On note alors, pour tout réel  $t$ ,  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X$  est solution de  $(S_A)$  si et seulement si  $Y$  est solution de  $(S_T)$ .

5. a) Donner les fonctions  $\varphi$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_1)$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \quad (\mathcal{E}_1)$$

b) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto ate^{2t}$  est une solution de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_2)$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ae^{2t} \quad (\mathcal{E}_2)$$

c) Soit  $b \in \mathbb{R}$ . Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_3)$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bte^{2t} \quad (\mathcal{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

6. On fixe  $Y$  une solution de  $(S_T)$ .

a) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y_3(t) = y_3(0)e^{2t}$ .

b) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y_2(t) = y_2(0)e^{2t} + y_3(0)te^{2t}$ .

c) Déterminer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , une expression de  $y_1(t)$  similaire aux expressions précédentes.

7. On fixe  $X$  une solution de  $(S_A)$ .

a) Montrer qu'il existe trois réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = (\lambda_2 + \lambda_3)t e^{2t} \\ x_2(t) = ((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2) e^{2t} \\ x_3(t) = ((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2) e^{2t} \end{cases}$$

b) Montrer que si la trajectoire associée à  $X$  est convergente, alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Interpréter.

## IV. Etudes de chaînes de Markov

### EML 2022 sujet 0

#### *Etude d'une marche aléatoire*

On considère trois points distincts du plan  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape  $n = 0$ , on suppose que le pion se trouve sur le point  $A$ . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$  ne dépend que de la position du pion à l'étape  $n$  : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ , on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

- $A_n$  l'événement « le pion se trouve en  $A$  à l'étape  $n$  » et  $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ ,
- $B_n$  l'événement « le pion se trouve en  $B$  à l'étape  $n$  » et  $q_n = \mathbb{P}(B_n)$ ,
- $C_n$  l'événement « le pion se trouve en  $C$  à l'étape  $n$  » et  $r_n = \mathbb{P}(C_n)$ ,
- $V_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$  le  $n^{\text{e}}$  état de cette chaîne de Markov.

#### Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) Déterminer  $p_0, q_0, r_0$ , ainsi que  $p_1, q_1, r_1$ .
- (b) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la relation :  $V_{n+1} = V_n M$ .
- (c) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $V_n = V_0 M^n$ .

#### Partie II - Calcul des puissances de la matrice $M$ et application

3. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- (a) Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable.
- (b) Calculer  $A^2 - 5A$ . Quelles sont les valeurs propres possibles de  $A$  ?
- (c) Déterminer une matrice inversible  $P$  ainsi qu'une matrice diagonale  $D$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . On calculera la matrice  $P^{-1}$ .
- (d) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $A^n = PD^n P^{-1}$ .

4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Démontrer que :  $M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$ , où  $M$  est la matrice introduite à la question 1.

- (b) Démontrer que  $p_n = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{4^n} \right)$  et déterminer alors une expression de  $q_n$  et  $r_n$ .

6. Déterminer les limites respectives des suites  $(p_n)$ ,  $(q_n)$  et  $(r_n)$ . Interpréter ces résultats.

### Partie III - Nombre moyen de passages en $A$ et temps d'attente avant le premier passage en $B$

7. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A}_n \text{ est réalisé} \end{cases}$$

- (a) Interpréter la variable aléatoire  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Quelle est la signification de l'espérance  $\mathbb{E}(S_n)$  ?
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $X_n$ .
- (c) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le nombre moyen de passage en  $A$  entre l'étape 1 et l'étape  $n$ .
8. On définit la variable aléatoire  $T_B$  de la façon suivante :  $T_B$  est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en  $B$ , et dans le cas où le pion ne passe jamais en  $B$ , on pose  $T_B = 0$ .

Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire  $T_B$  ainsi que son espérance.

- (a) Calculer  $\mathbb{P}([T_B = 1])$  et  $\mathbb{P}([T_B = 2])$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer l'événement  $\overline{B}_n$  à l'aide des événements  $A_n$  et  $C_n$ .
- (c) Démontrer que  $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_1) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(\overline{B}_2 \cap \overline{B}_1)$ . En déduire que  $\mathbb{P}_{\overline{B}_2 \cap \overline{B}_1}(B_3) = \frac{1}{4}$ .

Dans la suite de l'exercice, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $D_n$  l'événement  $\bigcap_{k=1}^n \overline{B}_k$  et on admettra

$$\text{que : } \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}.$$

- (d) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer la probabilité  $\mathbb{P}([T_B = k])$ . En déduire la probabilité  $\mathbb{P}([T_B = 0])$ .
- (e) Justifier que la variable aléatoire  $T_B$  admet une espérance. Quelle est l'espérance de  $T_B$  ?

## AgroParisTech 2021 - chaîne de Markov à $2N + 1$ états

### Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On se donne une variable aléatoire  $X_0$  à valeurs dans  $\llbracket 0, 2N \rrbracket$  et on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\llbracket 0, 2N \rrbracket$  vérifiant, pour tout entier  $n$ ,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, 2N \rrbracket^2, \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés  $A$  et  $a$ ) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher,  $X_n$  représente le nombre d'allèles de type  $A$  à la génération  $n$  dans une population finie de taille  $N$ .

### Etude d'un cas particulier

On suppose ici que  $N = 1$  et on note, pour tout entier  $n$ ,  $V_n = (\mathbb{P}([X_n = 0]) \quad \mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]))$ .

1. Déterminer une matrice  $M$  telle que pour tout entier  $n$ , on ait  $V_{n+1} = V_n M$ .
2. Prouver que  $M$  est diagonalisable et déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telle que  $M = PDP^{-1}$ .
3. Calculer  $M^n$  pour tout entier  $n$ .
4. En déduire que :
  - a) pour tout entier  $n$ , on a  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ .
  - b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n \in \{0, 2\}]) = 1$

### Cas général

On suppose désormais que  $N \geq 1$ . On cherche à généraliser les résultats de la question 4.

5. a) Soit  $i \in \llbracket 0, 2N \rrbracket$ . Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

et en déduire sa valeur.

- b) En déduire que pour tout entier  $n$ , on a  $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$ .
- c) Interpréter le résultat obtenu.
6. On considère la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \mathbb{P}([X_n \in \{0, 2\}])$ .
  - a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 1, 2N - 1 \rrbracket$ . Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0, 2\}]) \geq 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$$

- b) En déduire que, pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n + 2(1 - u_n) \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$ .
- c) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On considère la suite  $(w_n)$  définie par :

$$w_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + \alpha(1 - w_n)$$

Justifier que la suite  $(w_n)$  est convergente et donner sa limite.

- d) Conclure et interpréter le résultat obtenu.